Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2012**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 9

Abgabe: Dienstag, 12. Juni 2012, vor der Vorlesung

In den Aufgaben 33 und 34 seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion F. Sei $g(X_1, \ldots, X_m)$ integrierbar und symmetrisch in den Argumenten. Die zu $X_1, \ldots, X_n$ mit $n \geq m$ gehörige *U-Statistik* mit *Kern* g ist

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} g(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}).$$

33. Setze $\bar{g} = g - E[g(X_1, \ldots, X_m)]$ und definiere

$$\begin{aligned} g_k(x_1, \ldots, x_k) &= E[g(x_1, \ldots, x_k, X_{k+1} \ldots, X_m)] \\ &= E(g(X_1, \ldots, X_m) | X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für eine U-Statistik U_n mit $E[g^2(X_1, \ldots, X_m)] < \infty$ gilt

$$\operatorname{Var}(U_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k} \zeta_k$$

mit $\zeta_k := \operatorname{Var}(g_k(X_1, \ldots, X_k))$.

34. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen aus Aufgabe 33:

a) Es gilt $\zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \cdots \leq \zeta_m$.

b) Sei m fest und k zwischen 1 und m so, dass $\zeta_j = 0$ für $j < k$ und $\zeta_k > 0$, dann gilt
$$\operatorname{Var}(U_n) = \frac{k! \binom{m}{k}^2 \zeta_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

35. (6 Punkte) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit stetiger Verteilungsfunktion F. Es sei bekannt, dass die Verteilungsfunktion F symmetrisch um 0 ist. Bezeichne ferner U_n die U-Statistik mit Kern $g(x, y) = 1_{(0,\infty)}(x + y)$.

a) Zeigen Sie, dass sich die Vorzeichen-Rangstatistik T^+ schreiben lässt als

$$T^+ = \binom{n}{2} U_n + \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i > 0\}}.$$

b) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $n^{-3/2}(T^+ - ET^+)$.

36. (4 Punkte) Von einer Population mit stetiger Verteilungsfunktion und mit einem eindeutigen Median nehmen wir eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_{10}$ der Größe 10 mit Werten

5,1 8,0 6,4 16,0 6,1 10,4 9,9 7,2 12,3 0,1.

a) Wenden Sie die zweiseitige Version des Vorzeichentests vom Niveau $\alpha = 0,1$ an, um die Hypothese $H : m = 5,3$ gegen $K : m \neq 5,3$ zu testen.

b) Die Verteilungsfunktion sei zusätzlich symmetrisch um den Median m. Testen Sie mit Hilfe der Vorzeichen-Rangstatistik $H : m = 5,3$ gegen $K : m \neq 5,3$ zum Niveau $\alpha = 0,1$.