Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Sommersemester 2012

Übungen zur Asymptotischen Statistik
Serie 10

Abgabe: Dienstag, 19. Juni 2012, vor der Vorlesung

37. a) Sei μ ein σ-endliches und ν ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann gilt $\nu \ll \mu$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt

$$\mu(B) \leq \delta \;\Rightarrow\; \nu(B) \leq \varepsilon.$$

b) Betrachte nun die Folgen (P_n) und (Q_n) mit $P_n := P$ und $Q_n := Q$ für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q. Zeigen Sie, dass $Q_n \lhd P_n$ genau dann gilt, wenn $Q \ll P$.

38. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $P_n := \bigotimes_{j=1}^n N_{0,1}$ und $Q_n := \bigotimes_{j=1}^n N_{n^{-\delta},1}$, $\delta > 0$. Dann gilt:

$$Q_n \lhd P_n \quad \Leftrightarrow \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

39. a) Definiere $\|P - Q\| := \sup_A |P(A) - Q(A)|$. Seien nun zwei Folgen (P_n) und (Q_n) von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit $\|P_n - Q_n\| \to 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass gilt $P_n \lhd Q_n$ und $Q_n \lhd P_n$.
b) Sei $\varepsilon > 0$. Finden Sie ein Beispiel von Folgen (P_n) und (Q_n), so dass $P_n \lhd Q_n$ und $Q_n \lhd P_n$ gilt, aber $\|P_n - Q_n\|$ gegen $1 - \varepsilon$ konvergiert.

40. Seien P_n und Q_n Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, deren Dichtequotient $\frac{dQ_n}{dP_n}$ in Verteilung unter P_n gegen e^Z mit $Z \sim N_{\mu,\sigma^2}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $P_n \lhd Q_n$ und dass $Q_n \lhd P_n$ genau dann, wenn $\mu = -\frac{1}{2}\sigma^2$.