

Übungen zur Asymptotischen Statistik  
Serie 12

Abgabe: Dienstag, 3. Juli 2012, vor der Vorlesung

45. Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig mit Verteilung  $P_\vartheta$ ,  $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ . Sei  $\kappa : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar in  $\vartheta$ . Zeigen Sie:

- Ist  $\hat{\vartheta}$  regulär in  $\vartheta$  mit Limes  $V$ , so ist  $\kappa(\hat{\vartheta})$  regulär für  $\kappa$  in  $\vartheta$  mit Limes  $\kappa'(\vartheta)V$ .
- Ist  $\hat{\vartheta}$  asymptotisch linear in  $\vartheta$  mit Einflussfunktion  $h$ , so ist  $\kappa(\hat{\vartheta})$  asymptotisch linear für  $\kappa$  in  $\vartheta$  mit Einflussfunktion  $\kappa'(\vartheta)h$ .

46. Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $N_{\vartheta, \sigma^2}$ -verteilt mit bekannter Varianz  $\sigma^2$ .

- Zeigen Sie, dass die Familie  $(N_{\vartheta, \sigma^2})_{\vartheta \in \mathbb{R}}$  Hellinger-differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.
- Bestimmen Sie einen regulären und effizienten Schätzer für  $E[X_1^3]$ .
- Seien nun  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig  $N(\vartheta, I)$ -verteilt mit  $\vartheta \in \mathbb{R}^3$  und der Einheitsmatrix  $I$ . Dann ist der Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \left(1 - \frac{1}{n|\bar{X}_n|^2}\right) \bar{X}_n$$

von  $\vartheta$  in 0 nicht regulär.

*Hinweis:* Ist das Modell lokal asymptotisch normal (LAN),  $\kappa$  ein in  $\vartheta$  stetig differenzierbares Funktional und  $\hat{\vartheta}$  regulär und effizient in  $\vartheta$ , so ist  $\kappa(\hat{\vartheta})$  regulär und effizient für  $\kappa$  in  $\vartheta$ .

47. Sei  $T_1, \dots, T_m$  eine Gruppe messbarer Transformationen auf  $\Omega$ . Sei  $\mathcal{P}$  die Familie der Verteilungen auf  $\mathcal{F}$ , die unter  $T_1, \dots, T_m$  invariant sind. Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig mit Verteilung  $P \in \mathcal{P}$ . Sei  $f \in L_2(P)$ . Bestimmen Sie ein lokales Modell in  $P$ , den kanonischen Gradienten von  $\varkappa(P) = Pf$  in  $P$  und einen in  $P$  effizienten Schätzer für  $Pf$ .

48. Sei  $\mathcal{P}$  gegeben durch

$$\mathcal{P} = \{P \text{ auf } \mathbb{R}^2 : P = P_1 \otimes P_2\}.$$

Berechnen Sie den kanonischen Gradienten für das Funktional  $\varkappa(P) = Pf$  und geben Sie einen regulären und effizienten Schätzer für  $Pf$  an.