Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Wintersemester 2012/13**

Übungen zur Mathematik I
für Physiker und Lehramtsstudierende
Serie 3
Abgabe bis 2.11., 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

9. (6 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz in $\mathbb{R}$ sowie auf absolute Konvergenz in $\mathbb{R}$:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^n+1}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{\frac{n+1}{n^3}}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$

10. (4 Punkte) Beweisen Sie:

a) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$,

b) $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$ für alle $n \geq k$.

11. a) Beweisen Sie: Ist $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ein komplexes Polynom mit reellen Koeffizienten und z_0 eine Nullstelle dieses Polynoms, so ist auch der komplex-konjugierte Wert $\overline{z_0}$ eine Nullstelle des Polynoms.
b) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^4 + 3z^2 + 2.$$

c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$p(z) = z^5 + z^4 - 16z - 16.$$

Hinweis zu b): Es gilt $p(i) = 0$.

12. a) Zeigen Sie: Die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist nicht stetig in 0. Ist die Funktion g mit $g(x) = x \cdot f(x)$ stetig in 0?
b) Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{, falls } x \neq 0 \text{ oder } y \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \text{ und } y = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie: Für festgehaltenes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $h_{x_0} : y \mapsto h(x_0, y)$ stetig. Genauso ist für festgehaltenes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $h^{y_0} : x \mapsto h(x, y_0)$ stetig. Finden Sie zwei Nullfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $h(x_n, y_n)$ nicht gegen $h(0,0) = 0$ konvergiert.

Heiteres aus der Mathematik:

Behauptung: Alle Katzen haben die gleiche Augenfarbe.
Beweis: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen jetzt an, dass je n Katzen die gleiche Augenfarbe haben, und beweisen, dass das auch für je $n+1$ Katzen gilt. Wir nehmen $n+1$ willkürlich ausgewählte Katzen und nummerieren sie. Nach der Induktionsvoraussetzung haben die Katzen mit den Nummern 1 bis n die gleiche Augenfarbe und auch die Katzen mit den Nummern 2 bis $n+1$. Zu beiden Mengen gehört z.B. die Katze Nr. 2, also haben alle $n+1$ Katzen die gleiche Augenfarbe. q.e.d.