Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Wintersemester 2012/13

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 6

Abgabe bis 23.11., 14.00 Uhr, in die Übungsfächer

21. a) Zeigen Sie: Existiert für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ in $[0,\infty]$, so ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe.
b) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes 4.1.3, dass für $z \in \mathbb{R}$ mit $|z| < 1$ die Formel

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

gilt.

22. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n} z^{2n}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}$,

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n$, e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

23. Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden, für alle $x > 0$ definierten Funktionen:

$$f_1(x) = x^{(x^x)}; \quad f_2(x) = x^{(x^a)}; \quad f_3(x) = x^{(a^x)}; \quad f_4(x) = (\ln x)^x.$$

Hinweis: Kettenregel

24. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [-1,1]$ mit $x^2 + y^2 \le 1$ gilt:

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\Big(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\Big).$$

Heiteres aus der Mathematik:

Nichtmathematiker zum Mathematiker: „Ich finde ihre Arbeit ziemlich monoton."
Mathematiker: „Mag sein! Dafür ist sie aber stetig und nicht beschränkt."

Auf Löwenjagd in der Wüste
Die funktionalanalytische Methode:
Die Wüste ist ein separabler Raum. Er enthält daher eine abzählbare dichte Menge, aus der eine Folge ausgewählt werden kann, die gegen den Löwen konvergiert. Mit einem Käfig auf dem Rücken, springen wir von Punkt zu Punkt dieser Folge und nähern uns so dem Löwen beliebig genau.