Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2012/13**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 11

Abgabe: 10.1.2013, 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

Alle Punkte auf diesem Blatt sind Bonuspunkte!

41. Seien $E_2 = (e_1, e_2)$ bzw. $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasen des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$. Weiter sei

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad B' := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Bestimmen Sie für die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

die Matrizen $M(f; E_3, E_2)$, $M(f; E_3, B')$, $M(f; B, E_2)$ und $M(f; B, B')$.

42. a) Zeigen Sie, dass zwei Matrizen $A, B \in K^{(m,n)}$ genau dann äquivalent sind, wenn sie zur selben linearen Abbildung $f : V \to W$ bezüglich geeigneter Basen gehören. Dabei sind $\dim V = n$ und $\dim W = m$.
b) Beweisen Sie Satz 7.5.21 aus der Vorlesung.

43. Sei $A \in K^{(n,n)}$ invertierbar, d.h. $\operatorname{rg} A = n$. Zeigen Sie: Ist $x^i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$ die Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = e_i$, so gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie auf diese Weise die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

44. a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a & a & b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$$

in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$.
b) Untersuchen Sie für $a = 3$, $b = -2$ das Gleichungssystem

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf Lösbarkeit und bestimmen Sie alle Lösungen.

Heiteres aus der Mathematik:

Warum sind Äpfel und Birnen auch Abbildungen? - Sie haben Kerne.

Ein Soziologe, ein Ingenieur, ein Experimentalphysiker, ein Mathematiker und ein theoretischer Physiker sitzen in einem Zugabteil auf ihrer ersten Englandreise.
Der Soziologe schaut aus dem Fenster und sagt: „Oh, schaut mal, ein schwarzes Schaf.“
Daraufhin der Ingenieur: „Ah, in England sind alle Schafe schwarz.“
Daraufhin der Experimentalphysiker: „Nein, wir wissen nur, dass es in England mindestens ein schwarzes Schaf gibt.“
Daraufhin der Mathematiker: „Nein, nein, in England gibt es mindestens ein Schaf, das von einer Seite schwarz ist.“
Daraufhin der theoretische Physiker: „Auch das stimmt nicht. Es muss heißen, dass es in England ein Schaf gibt, dessen eine Seite uns aus einer bestimmten Entfernung unter gewissen optischen Bedingungen schwarz erscheint.“
Da wird es dem Soziologen zu bunt. Er zieht die Notbremse, der Zug kommt zum Stehen und die fünf steigen aus, um den Dingen auf den Grund zu gehen. Als sie das Tier erreicht haben, stellen sie fest, dass es tatsächlich auf der einen Seite weiß und auf der anderen Seite schwarz mit kleinen aus der Ferne nicht erkennbaren weißen Flecken ist. Der Bauer kommt, verwundert über den Aufmarsch auf seinem Feld, herbei.
Der Soziologe spricht ihn an: „Komische Schafe haben Sie hier.“
Daraufhin der Bauer: „Das ist kein Schaf, das ist ’ne Ziege!“