Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Wintersemester 2012/13**

Übungen zur Mathematik I

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 12

Abgabe: 17.1.2013, 8.00 Uhr - 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

45. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

und berechnen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Inverse dieser Matrix.

46. (6 Punkte) Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}$$

und bestimmen Sie jeweils eine Basis für jeden der dazugehörigen Eigenräume. Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist, und bestimmen Sie gegebenenfalls eine Matrix $T \in GL(4, \mathbb{R})$, so dass $T^{-1}AT$ Diagonalgestalt hat.
Hinweis: Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $B \in \mathbb{R}^{(m,m)}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B).$$

Wer dies beweist, erhält zwei Bonuspunkte!

47. (4 Punkte) Sei K ein Körper und $A \in K^{(n,n)}$. Dann gilt $\chi_A(A) = A^n + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = 0$, wobei auf der rechten Seite die Nullmatrix steht. Beweisen Sie diese Aussage

a) durch direktes Nachrechnen für $A \in K^{(2,2)}$,

b) für eine diagonalisierbare Matrix $A \in K^{(n,n)}$.

48. Es sei $V = \mathbb{R}^{(n,n)}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen $(n \times n)$-Matrizen. Zeigen Sie:

a) Durch $< A, B >:= sp\,(A^t \cdot B)$ wird auf V ein Skalarprodukt definiert.

b) Sei $U_+ := \{U \in V | U^t = U\}$ der Untervektorraum aller symmetrischen und $U_- := \{U \in V | U^t = -U\}$ der Untervektorraum aller schiefsymmetrischen Matrizen. Beweisen Sie:

$$V = U_+ \oplus U_-, \quad U_+^\perp = U_-, \quad U_-^\perp = U_+.$$

Heiteres aus der Mathematik:

Kommt ein Nullvektor zum Psychiater: „Herr Doktor, ich bin orientierungslos!“

2 Leute gehen in ein leeres Haus, eine Weile später kommen 3 wieder heraus.
Was sagt der Theologe? „Ein Wunder! Ein Wunder!“
Was sagt der Physiker? „Da muss wohl einer 'reingetunnelt sein.“
Was sagt der Biologe? „Die haben sich wohl vermehrt?“
Was sagt die Hebamme? „Ist bei uns im Kreißsaal immer so.“
Was sagt der Mathematiker? „Wenn jetzt noch einer reingeht, ist das Haus wieder leer.“

Auf Löwenjagd in der Wüste (VI):
Die Projektionsmethode
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Wüste eine Ebene ist. Wir projizieren nun diese Ebene auf eine Gerade, die durch den Käfig läuft, und diese Gerade auf einen Punkt im Käfig. Damit gelangt der Löwe in den Käfig.