Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz

Wintersemester 2012/2013

Probeklausur zur Mathematik I
für Physiker und Lehramtsstudierende

Aufgabe 1: Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \qquad \text{b)}\ \prod_{k=1}^{n} k^k \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g:]0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{t} + t - 2 & , t \leq 1 \\ 0 & , t > 1 \end{cases}$$

in 1 stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (1+2+\cdots+n) z^n \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 3^n) z^n.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\text{a)}\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{b)}\ \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{c)}\ \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5: a) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}} \qquad \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

b) Zeigen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right) = \frac{11}{4}$
Hinweis zu a)(ii): Vergleichskriterium

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x) := (1+x)\ln(1+x) - x$ in $x_0 = 0$.

Aufgabe 7: Die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x + 2y - 4z \\ x - 5y + 3z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die darstellende Matrix $M(f;A,B)$ für die Basen

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von Bild f und Ker f.

Aufgabe 8: Bestimmen Sie die Werte $\lambda \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden Gleichungssysteme genau eine Lösung, keine Lösung oder mehrere Lösungen besitzen. Geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\text{(i)} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 1 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 8x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 9: Zeigen Sie, dass für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in K$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

Insbesondere sind die Vektoren $x_i = (1, a_i, a_i^2, \ldots, a_i^{n-1})^t \in K^n$, $i = 1, \ldots, n$, genau dann linear unabhängig, wenn $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschieden sind.

Aufgabe 10: Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & -3 & -8 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$.
b) Ist A diagonalisierbar bzw. trigonalisierbar über $\mathbb{R}$?

Aufgabe 11: In Aufgabe 48 haben wir gesehen, dass durch

$$< A, B > := \operatorname{sp}(A^t \cdot B)$$

ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{(n,n)}$ der $n \times n$-Matrizen gegeben ist. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von V. Berechnen Sie aus diesen „Vektoren“ eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 12: Sei $U \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ ein unitäre Matrix. Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von U, so gilt $|\lambda| = 1$.

b) Es gilt $|\det U|^2 = 1$.