Prof. Dr. W. Wefelmeyer
Dr. M. Schulz **Sommersemester 2013**

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 0

keine Abgabe, vorzubereiten für die erste Übungsstunde

0.1 Sei $V = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren, reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$. Wir betrachten für alle $x \in [0,1]$ die folgenden Abbildungen $V \to \mathbb{R}$:

$$\delta_x(f) = f(x),\ \delta_x'(f) = -f'(x),\ \sigma_x(f) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ \sigma_x'(f) = -\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$\alpha(f) = \int_0^1 t\cdot f'(t)\,\mathrm{d}t,\quad \beta(f) = \int_0^1 f(t^2)\,\mathrm{d}t,\quad \gamma(f) = \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Welche der Abbildungen sind Linearformen auf V, also Elemente des Dualraumes V^*? Stellen Sie σ_x' und α als Linearkombination geeigneter Abbildungen δ_x und σ_x dar.

0.2 Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und die lineare Abbildung Φ_a definiert durch $\Phi_a(p) := p(a)$.

a) Zeigen Sie, dass für paarweise verschiedene a_1, a_2, a_3 die Abbildungen $\Phi_{a_1}, \Phi_{a_2}, \Phi_{a_3}$ eine Basis von V^* bilden.

b) Wie man leicht zeigen kann, ist $B := \{1, x+1, x^2+x+1\}$ eine Basis von V. Bestimmen Sie die zu B duale Basis.

0.3 Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\omega : V^n \to \mathbb{R}$ eine Multilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) ω ist *schiefsymmetrisch*, d.h. für alle $v_1, \ldots, v_n \in V$ und alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ gilt

$$\omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n) = -\omega(v_1, \ldots, v_n)$$

(auf der linken Seite der Gleichung ist nur die Position von v_i und v_j vertauscht).

(ii) ω ist *alternierend*, d.h. für alle $v_1, \dots, v_n \in V$ derart, dass $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $v_i = v_j$ existieren, gilt $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$.

(iii) Für alle $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$ und alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{n-1}) = 0.$$

0.4 Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $r, s \in \mathbb{N}$. Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, so nennt man die lineare Abbildung $F^* : \Lambda^r W^* \to \Lambda^r V^*, \xi \mapsto F^*\xi$, die durch

$$\forall \xi \in \Lambda^r W^*, v_1, \dots, v_n \in V : (F^*\xi)(v_1, \dots, v_n) = \xi(F(v_1), \dots, F(v_n))$$

charakterisiert wird, den *Pullback* zu F. Zeigen Sie:

(a) Sind $F : V \to W$ und $G : U \to V$ lineare Abbildungen, so gilt

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*.$$

(b) Ist $F : V \to W$ eine lineare Abbildung, so gilt

$$\forall \xi \in \Lambda^r W^*, \eta \in \Lambda^s W^* : F^*(\xi \wedge \eta) = (F^*\xi) \wedge (F^*\eta).$$

Hinweis: Verwenden Sie besser die Identität

$$\xi \wedge \eta(v_1, \dots, v_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \operatorname{sign}(\sigma) \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) \cdot \eta(v_{\sigma(r+1)}, \dots, v_{\sigma(r+s)}).$$

Zitate:

Alle Pädagogen sind sich darin einig: Man muss vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.
Felix Klein (1849-1925) - deutscher Mathematiker

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, sie etwas unterhaltsamer zu gestalten.
Blaise Pascal (1623-1662) - französischer Mathematiker, Physiker, Literat und christlicher Philosoph