Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2013**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 1

Abgabe: 18.04.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

1. (4 Punkte) Die Funktion $f : I \times I' \to \mathbb{R}$ genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Ferner seien $J \subset I$ und $J' \subset I'$ abgeschlossene und beschränkte Intervalle. Zeigen Sie, dass f auf $J \times J'$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

2. Unter einer *autonomen* oder *zeitunabhängigen* Differentialgleichung versteht man eine DGL der Form $y' = g(y)$ mit einer Funktion $g : D \to \mathbb{R}$.
a) Zeigen Sie: Ist $y : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(y)$, so ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $y_a := y(x-a)$ ebenfalls eine Lösung dieser Differentialgleichung. Gilt für alle $v \in D$ außerdem $-v \in D$ und $g(-v) = g(v)$, so ist auch $\tilde{y} := -y(-x)$ eine Lösung dieser Differentialgleichung.
b) Bestimmen Sie mit Hilfe von a) alle Lösungen $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = \sqrt{|y|} \quad \text{mit} \quad y(0) = 0.$$

3. (6 Punkte) Untersuchen Sie folgende Anfangswertprobleme auf Lösbarkeit und (lokale) Eindeutigkeit der Lösung und lösen Sie sie:

a) $y' = x^3 + \cos(x) \quad \text{mit} \quad y(1) = 1,$

b) $y' = e^y \sin(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0,$

c) $y' = \frac{2xy}{x^2+1} \quad \text{mit} \quad y(0) = 3.$

Geben Sie in b) außerdem den maximalen Definitionsbereich der Lösung an. Wie verhält er sich für $y_0 \to \infty$?

4. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a) $y' = x \cdot y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2,$

b) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2} \quad \text{mit} \quad y(1) = 1,$

c) $y' = -\sin(x)y + \sin(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1.$

Hinweis: Bei der Lösung dieser Aufgabe dürfen Sie auf die Methoden aus Abschnitt 8.2 zurückgreifen.

Zitate:

Beweisen muss ich diesen Käs'
sonst ist die Arbeit unseriös.
Friedrich Wille (1935-1992) - deutscher Mathematiker; u.a. Verfasser der Hauptsatzkantate

Je mehr Käse, desto mehr Löcher.
Je mehr Löcher, desto weniger Käse.
Ergo: Je mehr Käse, desto weniger Käse.
unbekannt