Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 2013**
Dr. M. Schulz

Übungen zur Mathematik II

für Physiker und Lehramtsstudierende

Serie 8

Abgabe: 13.06.2013, 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr, in die Übungsfächer

29. Die 2π-periodische Funktion f sei auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ durch

$$f(x) = |x|(\pi - |x|)$$

gegeben. Berechnen Sie die reellen Fourierkoeffizienten. Warum konvergiert die Fourierreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$? Zeigen Sie außerdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

30. Berechnen Sie die komplexe Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion, die definiert ist durch

$$f(x) := \sin(2x)e^x\,, \quad x \in [-\pi, \pi[.$$

Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich und überführen Sie die komplexe Fourierreihe in die reelle Fourierreihe.

31. Sei $f \in L_1(\mathbb{R})$. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation und der Faltung:

a) Ist $f_y : x \mapsto f(x-y)$, so gilt $\widehat{f_y}(t) = e^{-ity}\hat{f}(t)$.

b) Ist $e_y : x \mapsto e^{ixy}$, so gilt $\widehat{(e_y f)}(t) = \hat{f}(t-y)$.

c) Die Faltung ist kommutativ, d.h. für $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ gilt $f * g = g * f$.

d) Ist $f \in L_1(\mathbb{R})$ und g auf $\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar mit beschränktem Träger, dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f * g) = f * \frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}x^k}.$$

32. Für $a > 0$ seien $f_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2+a^2}$ und $g_a(x) = e^{-a|x|}$.

a) Bestimmen Sie die Fouriertransformationen von f_a und g_a.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation $f_a * f_b = f_{a+b}$ für $a, b > 0$.

Mathematische Beweismethoden (nicht ganz ernst gemeint):

- Beweis durch nicht verfügbare Literatur:
  Der Autor zitiert ein einfaches Korollar eines Theorems, welches problemlos nachgelesen werden kann und zwar in einem Mitteilungsblatt der slowenischen philologischen Gesellschaft, 1883. Diese Beweisführung ist völlig erschöpfend und wird seit Jahrzehnten mit Vorliebe bei schriftlichen Ausarbeitungen (siehe Literaturangaben in beliebigen Dissertationen und Habilitationen) angewandt.

- Beweis durch Scheinverweis:
  Nichts dem zitierten Satz auch nur entfernt Ähnliches erscheint in der angegebenen Quelle.