Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 2

Abgabe: Dienstag, 29. Oktober 2013, vor der Vorlesung

6. Zeigen Sie: Ist T eine suffiziente Statistik und gilt $T = \psi(S)$ mit einer messbaren Funktion ψ und einer anderen Statistik S, dann ist auch S suffizient.

7. Seien T und S zwei Statistiken, so dass für eine messbare Funktion ψ gilt $S = \psi(T)$. Beweisen Sie:

a) Wenn T vollständig ist, dann ist auch S vollständig.

b) Wenn T vollständig und suffizient, ψ bijektiv und ψ^{-1} messbar ist, dann ist S vollständig und suffizient.

c) Die Ergebnisse aus a) und b) bleiben gültig, wenn man die Vollständigkeit durch die beschränkte Vollständigkeit ersetzt.

8. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und nach $P_\vartheta \in \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ verteilt. Bestimmen Sie in den folgenden Fällen eine zweidimensionale suffiziente Statistik für ϑ. Überlegen Sie jeweils, ob diese vollständig ist.

a) P_ϑ ist die Gamma-Verteilung $\Gamma_{a,b}$ mit $\vartheta = (a, b)^\top$.

b) P_ϑ ist die $N_{\vartheta,\vartheta^2}$-Verteilung.

9. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $E(a, \vartheta)$-verteilt (vgl. Aufgabe 3) mit $\vartheta > 0$ fest. Geben Sie eine möglichst niedrigdimensionale suffiziente Statistik für a an. Ist sie vollständig oder minimal?

10. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige und N_{μ,σ^2}-verteilte Zufallsvariablen. Dann sind $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ und $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ unabhängig.