Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Wintersemester 2013/14**
M. Sc. Christoph Heuser

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 3

Abgabe: Dienstag, 05. November 2013, vor der Vorlesung

11. Seien $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$, unabhängig und verteilt nach einer unbekannten Verteilung $P|\mathcal{B}$ mit endlicher Varianz. Bestimmen Sie erwartungstreue Schätzer für $\mathrm{Var}(X_1)$, $(EX_1)^2$ und $P(X_1 \leq t)$ für ein festes t.

12. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und $E(a, \vartheta)$-verteilt mit $a \in \mathbb{R}$ und $\vartheta > 0$.

a) Bestimmen Sie einen UMVU-Schätzer für a, wenn ϑ bekannt ist.

b) Bestimmen Sie einen UMVU-Schätzer für ϑ, wenn a bekannt ist.

c) Sei ϑ bekannt. Bestimmen Sie einen UMVU-Schätzer für $P(X_1 > t)$.

13. Sei $X = (X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor mit Verteilung P^X, $P \in \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ und $\Theta \subset \mathbb{R}$ offen. $S(X)$ sei ein Schätzer mit $E[S(X)] = s(\vartheta)$ für eine differenzierbare Funktion $s(\vartheta)$. Setze zusätzlich voraus, dass P_ϑ^X für jedes $\vartheta \in \Theta$ eine ν-Dichte f_ϑ besitzt. f_ϑ sei als Funktion von ϑ differenzierbar und erfülle

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \int h(x) f_\vartheta(x) \nu(dx) = \int h(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta} f_\vartheta(x) \nu(dx), \quad \vartheta \in \Theta$$

für $h(x) \equiv 1$ und $h(x) = S(x)$. Ferner gelte $0 < E\big[\big(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(X)\big)^2\big] < \infty$.

a) Dann gilt
$$\mathrm{Var}(S(X)) \geq \frac{(s'(\vartheta))^2}{E\big[\big(\frac{\partial}{\partial \vartheta} \log f_\vartheta(X)\big)^2\big]}.$$

b) Die rechte Seite der Ungleichung ist invariant unter differenzierbaren Umparametrisierungen.

Hinweis zu a): Verwenden Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

14. Beweisen Sie unter den gleichen Voraussetzungen wie in Aufgabe 13 die Aussagen:

a) Wenn $\mathrm{Var}(S(X))$ die Cramér-Rao-Schranke in Aufgabe 13 annimmt, dann gilt

$$S(X) = s(\vartheta) + \frac{s'(\vartheta)}{E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log f_\vartheta(X)\right)^2\right]} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \log f_\vartheta(X) \quad P_\vartheta\text{-f.s.}$$

für $\vartheta \in \Theta$.

b) Hat zusätzlich f_ϑ die Form

$$f_\vartheta(x) = c(\vartheta)h(x)e^{\eta(\vartheta)T(x)}$$

mit differenzierbaren Funktionen $c(\vartheta)$ und $\eta(\vartheta)$, dann ist $S(X)$ eine lineare Funktion von $T(X)$ (P_ϑ-f.s., $\vartheta \in \Theta$).

15. Seien $X_1, \ldots, X_n$, $n > 1$, unabhängig und $B_{1,p}$-verteilt mit $p \in (0, 1)$.

a) Bestimmen Sie den UMVU-Schätzer T_n für $p(1-p)$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}(T_n)$ nicht die Cramér-Rao-Schranke aus Aufgabe 13 erreicht.