Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser

Wintersemester 20013/14

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 5

Abgabe: Dienstag, 19. November 2013, vor der Vorlesung

21. (3 Punkte) Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit Lebesgue-Dichte. Berechnen Sie das M-Funktional und einen M-Schätzer für $\psi_\vartheta(x) = |x - \vartheta|$.

22. Sei $\hat{t}$ ein (eindimensionaler) Schätzer mit

$$n^{1/2}(\hat{t} - t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} g(X_i) + o_p(1)$$

für ein $g \in L_2(P)$ mit $Pg = 0$. Sei f_s stetig differenzierbar in $s = t$, $f_t \in L_2(P)$ sowie $|\dot{f}_s| \leq H$ für s in einer Umgebung von t und ein P-integrierbares H. Was schätzt der *Einschritt-Schätzer*

$$\hat{\vartheta} = \hat{t} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{\hat{t}}(X_i),$$

und wie ist seine asymptotische Verteilung?

23. (5 Punkte) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f_ϑ. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ in den folgenden Fällen:

a) f_ϑ ist die Dichte der log-Normalverteilung mit Parametern μ und σ^2, d.h.

$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}\, x} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} 1_{(0,\infty)}(x),$$

mit $\vartheta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

b) $f_\vartheta(x) = \beta^{-\alpha} \alpha x^{\alpha - 1} 1_{(0,\beta)}(x)$ mit $\vartheta = (\alpha, \beta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.

24. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und auf den Intervall $(0, \vartheta)$ gleichverteilt; $\vartheta > 0$ sei unbekannt.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}$ für ϑ.

b) Bestimmen Sie den UMVU-Schätzer T für ϑ.

c) Sei $Z_{a,\vartheta}$ eine $E(a,\vartheta)$-verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass gilt

$$n(\vartheta - \hat{\vartheta}) \Rightarrow Z_{0,\vartheta} \quad \text{und} \quad n(\vartheta - T) \Rightarrow Z_{-\vartheta,\vartheta}.$$

25. Sei X eine Zufallsvariable mit Lebesgue-Dichte

$$f_\vartheta(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (x-\vartheta)^2} \quad , x \in \mathbb{R}, \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Sei $\hat{\vartheta}$ eine konsistente Version des Maximum-Likelihood-Schätzers. Zeigen Sie, dass $\sqrt{n}(\hat{\vartheta} - \vartheta)$ schwach gegen eine $N_{0,2}$-verteilte Zufallsvariable konvergiert.