Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. C. Heuser

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 11

Abgabe: Dienstag, 21. Januar 2014, vor der Vorlesung

51. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion F und Dichte f. Bezeichne mit R_i den Rang von X_i. Dann gilt

a) Der Vektor $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ hat die Dichte $n! \prod_{i=1}^n f(x_i)$ auf der Menge $x_1 < \cdots < x_n$.

b) Der Vektor $(R_1, \ldots, R_n)$ ist gleichverteilt auf der Menge aller $n!$ Permutationen von $1, 2, \ldots, n$.

c) Die Vektoren $(X_{1:n}, \ldots, X_{n:n})$ und $(R_1, \ldots, R_n)$ sind unabhängig.

d) Für jede messbare Abbildung T und jede Permutation $(r_1, \ldots, r_n)$ von $1, \ldots, n$ gilt

$$E(T(X_1, \ldots, X_n) | R_1 = r_1, \ldots, R_n = r_n) = ET(X_{r_1:n}, \ldots, X_{r_n:n}).$$

52. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und verteilt nach P. Sei P invariant unter einer endlichen Gruppe von Transformationen $T_1, \ldots, T_k$. Seien $w_1, \ldots, w_k$ Gewichte mit $w_1 + \ldots + w_k = 1$. Dann ist $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k w_s h(T_s X_i)$ ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für Ph. Berechnen Sie seine asymptotische Verteilung.

53. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und verteilt nach P. Sei P invariant unter einer Gruppe von Transformationen T_s, $s \in [0, 1]$. Sei w_s eine Gewichtsfunktion mit $\int w_s ds = 1$. Dann ist $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int w_s h(T_s X_i) ds$ ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für Ph. Berechnen Sie seine asymptotische Verteilung.

54. Seien $X_1, \ldots, X_m$ unabhängig mit Verteilung $P_{1,\vartheta}$, $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, und $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängig und unabhängig von $X_1, \ldots, X_m$ mit Verteilung $P_{2,\vartheta}$.

Seien $\hat{\vartheta}_1$ und $\hat{\vartheta}_2$ „asymptotische Maximum-Likelihood- Schätzer" für ϑ:

$$\begin{aligned}\hat{\vartheta}_1 - \vartheta &= \Lambda_{1,\vartheta}^{-1} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \dot{\ell}_{1,\vartheta}(X_i) + o_p(m^{-1/2}),\\ \hat{\vartheta}_2 - \vartheta &= \Lambda_{2,\vartheta}^{-1} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \dot{\ell}_{2,\vartheta}(Y_j) + o_p(n^{-1/2})\end{aligned}$$

mit $\Lambda_{1,\vartheta} = E[\dot{\ell}^2_{1,\vartheta}(X)]$ und $\Lambda_{2,\vartheta} = E[\dot{\ell}^2_{2,\vartheta}(Y)]$. Gelte $m/n \to c$. Konstruieren Sie eine optimale Konvexkombination von $\hat{\vartheta}_1$ und $\hat{\vartheta}_2$.

55. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilungsfunktion $F \in \mathcal{F}$ und P_G das zu $G \in \mathcal{F}$ gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß. Gegeben $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ ist die *nichtparametrische Likelihood-Funktion* definiert als das folgende Funktional von $\mathcal{F}$ nach $[0, \infty)$:

$$\ell(G) = \prod_{i=1}^{n} P_G(\{x_i\}), \quad G \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, dass die empirische Verteilungsfunktion $\mathbb{F}_n$ das Funktional über $G \in \mathcal{F}$ maximiert.
Hinweis: Benutzen Sie die Methode der Lagrange Multiplikatoren.