Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. C. Heuser

Wintersemester 2013/14

Übungen zur Mathematischen Statistik
Serie 12

Abgabe: Dienstag, 28. Januar 2014, vor der Vorlesung

56. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte f_θ. Bestimmen Sie einen Maximum–Likelihood–Schätzer für θ in den folgenden Fällen:
1. $f_\theta(x) = \sigma^{-1} e^{-(x-a)/\sigma} I_{(a,\infty)}(x)$ mit $\theta = (a, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.
2. $f_\theta(x) = \beta a^\beta x^{-(\beta+1)} I_{(a,\infty)}(x)$ mit $\theta = (a, \beta) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$.

57. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und auf dem Intervall $(0, \theta)$ gleichverteilt; $\theta > 0$ sei unbekannt.
Bestimmen Sie den Maximum–Likelihood–Schätzer $\hat{\theta}$ und zeigen Sie, dass er stochastisch gegen θ konvergiert. Wie ist $n(\theta - \hat{\theta})$ asymptotisch verteilt?

58. Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvektoren mit $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1 = 0$, $Var(X_1) = Var(Y_1) = 1$ und $Cov(X_1, Y_1) = \theta \in (-1, 1)$.
1. Zeigen Sie, dass $(\sum_{i=1}^n (X_i^2 + Y_i^2), \sum_{i=1}^n X_i Y_i)$ suffizient ist.
2. Untersuchen Sie, ob die Statistik aus 1. vollständig ist.
3. Zeigen Sie, dass $T_1 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ und $T_2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$ anzillär sind aber (T_1, T_2) nicht.

59. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit Dichte $f_{a,\theta}(x) = \frac{1}{\theta} e^{(a-x)/\theta} I_{(a,\infty)}(x)$ mit $\theta > 0$ und $a \in \mathbb{R}$.
1. Geben Sie einen UMVU–Schätzer für a an, wenn θ bekannt ist.
2. Geben Sie einen UMVU–Schätzer für θ an, wenn a bekannt ist.
3 . Geben Sie einen UMVU–Schätzer für a und θ an.

60. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und identisch $N(\theta, (\sigma + \theta)^2)$-verteilt mit unbekanntem $\theta > 0$ und bekanntem $\sigma > 0$. Sei $\hat{\theta} = \theta + o_P(1)$ eine Lösung der Schätzgleichung $(1/n) \sum_{i=1}^n \dot{l}_\tau(X_i) = o_P(n^{-1/2})$. Dann gilt: $\hat{\theta}$ ist asymptotisch normal.