Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. Christoph Heuser **Sommersemester 2014**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 1
Abgabe: Dienstag, 22. April 2014, vor der Vorlesung

Bemerkung: Sei μ ein k-dimensionaler Vektor und Σ eine positiv definite $k \times k$ Matrix. Die *k-dimensionale Normalverteilung* $N(\mu, \Sigma)$ mit Mittelwertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ hat die Dichte

$$p_{\mu,\Sigma}(x) = (2\pi)^{-k/2}(\det \Sigma)^{-1/2} \exp\Big(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\Big).$$

Es gilt folgende mehrdimensionale Version des zentralen Grenzwertsatzes. Sind $X, X_1, X_2, \dots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren mit Mittelwertvektor $\mu = EX$ und Kovarianzmatrix $\Sigma = E(X-\mu)(X-\mu)^\top$, dann gilt

$$n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) \Rightarrow N(\mu, \Sigma).$$

Bemerkung: Eine Abbildung $s \mapsto a_s$ von $\mathbb{R}$ nach $L_p(P)$ heißt *$L_p(P)$-differenzierbar* in t mit *Ableitung* $\dot{a}$, wenn

$$\|a_s - a_t - (s-t)\dot{a}\|_p = o(|s-t|).$$

Bildet die obige Abbildung von $\mathbb{R}$ in die Dichten ab und ist die obige Gleichung erfüllt, so bezeichnet man dies auch als *$L_p(a_t)$-differenzierbar* in t.

Eine Abbildung $s \mapsto f_s$ von $\mathbb{R}$ in die Dichten auf $\mathbb{R}$ heißt *Hellinger-differenzierbar* in t mit *Ableitung* $\dot{a}$, wenn

$$\lambda\Big(f_s^{1/2} - f_t^{1/2} - \frac{1}{2}(s-t)\dot{a}f_t^{1/2}\Big)^2 = o((s-t)^2).$$

1. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ i.i.d., und für $j = 1, \ldots, k$ seien h_j reellwertige Funktionen mit $Eh_j(X) = 0$ und $Eh_j^2(X) < \infty$. Seien T_{nj} *asymptotisch lineare* Schätzer für t_j mit *Einflussfunktion* $h_j(X)$, d.h. es gilt

$$n^{1/2}(T_{nj} - t_j) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h_j(X_i) + o_p(1).$$

Zeigen Sie mit $T_n = (T_{n1}, \ldots, T_{nk})^\top$, $t = (t_1, \ldots, t_k)^\top$, $h = (h_1, \ldots, h_k)^\top$:
a) Die Schätzer T_n sind asymptotisch linear für t mit Einflussfunktion h:

$$n^{1/2}(T_n - t) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} h(X_i) + o_p(1).$$

b) Hat $\Sigma = Eh(X)h(X)^\top$ eine von 0 verschiedene Determinante, so gilt $n^{1/2}(T_n - t) \Rightarrow N(0, \Sigma)$.

2. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Seien S_n, T_n reellwertige Schätzer für t mit Einflussfunktionen $g(X)$, $h(X)$, so dass $Eg(X) = Eh(X) = 0$ und $\sigma^2 = Eg^2(X) = Eh^2(X) < \infty$ gilt. Dann ist das arithmetische Mittel $(S_n + T_n)/2$ asymptotisch nicht schlechter als S_n oder T_n. Wie gut kann es werden?

3. Ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_2(f_t)$-differenzierbar in t, so ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar mit derselben Ableitung.
Hinweis: $f_s - f_t = (f_s^{1/2} - f_t^{1/2})(f_s^{1/2} + f_t^{1/2})$.

4. Ist $s \mapsto f_s$ Hellinger-differenzierbar in t, so ist $s \mapsto f_s/f_t$ $L_1(f_t)$-differenzierbar mit derselben Ableitung.

5. a) Zeigen Sie, dass die Lageparameter-Familie P_ϑ, $\vartheta \in \mathbb{R}$, mit Lebesgue-Dichten

$$p_\vartheta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\vartheta|}$$

in jedem Punkt $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$ Hellinger-differenzierbar mit Ableitung $\dot{\ell}_{\vartheta_0}(x) = \operatorname{sgn}(x - \vartheta_0)$ ist.
b) Zeigen Sie, dass die Familie der Dichten der Gleichverteilung auf $[0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, nirgendwo Hellinger-differenzierbar ist.