Prof. Dr. W. Wefelmeyer
M. Sc. C. Heuser **Sommersemester 2014**

Übungen zur Statistik für Zeitreihen
Serie 3
Abgabe: Dienstag, 6. Mai 2014, vor der Vorlesung

11. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig N_{ϑ,σ^2}-verteilt mit bekannter Varianz σ^2.

a) Zeigen Sie, dass die Familie $(N_{\vartheta,\sigma^2})_{\vartheta\in\mathbb{R}}$ Hellinger-differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung.

b) Bestimmen Sie einen regulären und effizienten Schätzer für $E[X_1^3]$.

c) Seien nun $X_1, \dots, X_n$ unabhängig $N(\vartheta, I)$-verteilt mit $\vartheta \in \mathbb{R}^3$ und der Einheitsmatrix I. Dann ist der Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \Big(1 - \frac{1}{n|\bar{X}_n|^2}\Big)\bar{X}_n$$

von ϑ in 0 nicht regulär.

Hinweis: Ist das Modell lokal asymptotisch normal (LAN), κ ein in ϑ stetig differenzierbares Funktional und $\hat{\vartheta}$ regulär und effizient in ϑ, so ist $\kappa(\hat{\vartheta})$ regulär und effizient für κ in ϑ.

12. *(Komponentenweise Effizienz impliziert verbundene Effizienz.)*
Sei P_{na}, $a \in A$, lokal asymptotisch normal in a. Für $j = 1, \dots, m$ seien $\varkappa_j : A \to \mathbb{R}$ differenzierbar in a mit kanonischem Gradienten g_{0j}, und $\hat{\varkappa}_j$ reguläre und effiziente Schätzer für $\varkappa_j$ in a. Dann ist $\hat{\varkappa} = (\hat{\varkappa}_1, \dots, \hat{\varkappa}_m)^\top$ regulär und effizient für $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_m)^\top$ in a und asymptotisch linear mit Einflussfunktion $g_0 = (g_{01}, \dots, g_{0m})^\top$.

13. Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{B}$ mit endlichem vierten Moment. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $\varkappa(P)$ das zweite Moment von P. Zeigen Sie, dass $\varkappa$ differenzierbar ist, und bestimmen Sie den (kanonischen) Gradienten und einen effizienten Schätzer für $\varkappa$.

14. Seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängige zweidimensionale Zufallsvektoren mit Verteilung P_ϑ, so dass gilt: $Y_i = \vartheta X_i + \varepsilon_i$ mit X_i und ε_i unabhängig. Für jedes $i = 1, \dots, n$ besitze ε_i die bekannte Dichte f mit

$\int u^2 f(u) du < \infty$ und X_i die bekannte Dichte g mit $\int x^2 g(x) dx > 0$. f sei stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Bestimmen Sie die effiziente Einflussfunktion. Ist der Kleinste Quadrate-Schätzer

$$\hat{\vartheta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

effizient? Ist er regulär?

15. Sei $T_1, \ldots, T_m$ eine Gruppe messbarer Transformationen auf Ω. Sei $\mathcal{P}$ die Familie der Verteilungen auf $\mathcal{F}$, die unter $T_1, \ldots, T_m$ invariant sind. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig mit Verteilung $P \in \mathcal{P}$. Sei $f \in L_2(P)$. Bestimmen Sie ein lokales Modell in P, den kanonischen Gradienten von $\varkappa(P) = Pf$ in P und einen in P effizienten Schätzer für Pf.