Prof. Dr. W. Wefelmeyer **Sommersemester 14**
M. Sc. Christoph Heuser

Übungen zur Statistik für Zeitreihen (Statistik II)
Serie 7
Abgabe: Dienstag, 3. Juni 2014, vor der Vorlesung

31. Finden Sie für die allgemeine AR(1)-Zeitreihe $X_t = \varrho X_{t-1} + Z_t$ mit $|\varrho| > 1$ eine stationäre Lösung (der nicht-kausalen Form $X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j Z_{t+j}$).

32. Untersuchen Sie, ob die folgenden Prozesse kausal und/oder invertierbar sind:

a) $X_t + 0{,}2X_{t-1} - 0{,}48X_{t-2} = Z_t$,

b) $X_t + 1{,}9X_{t-1} + 0{,}88X_{t-2} = Z_t + 0{,}2Z_{t-1} + 0{,}7Z_{t-2}$,

c) $X_t + 0{,}6X_{t-2} = Z_t + 1{,}2Z_{t-1}$,

d) $X_t - 1{,}6X_{t-1} - 0{,}8X_{t-2} = Z_t + 1{,}6Z_{t-1} + 3{,}2Z_{t-2}$.

33. Sei $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ eine stationäre Zeitreihe. Zeigen Sie, dass eine stationäre Lösung (X_t) der Gleichung

$$X_t - \varrho_1 X_{t-1} - \cdots - \varrho_p X_{t-p} = Y_t + \varphi_1 Y_{t-1} + \cdots + \varphi_q Y_{t-q}$$

existiert, wenn $\varrho(z) = 1 - \varrho_1 z - \cdots - \varrho_p z^p \neq 0$ für $|z| = 1$. Ferner ist (X_t) eine kausale Funktion von (Y_t), wenn $\varrho(z) \neq 0$ für $|z| \leq 1$.

34. Sei (X_t) ein ARMA-Prozess mit $\varrho(z) \neq 0$, $|z| = 1$, und Autokovarianzfunktion $\gamma(\cdot)$. Zeigen Sie, dass es Konstanten $C > 0$ und $\delta \in (0,1)$ gibt, so dass $|\gamma(s)| \leq C\delta^{|s|}$ gilt. Insbesondere gilt dann

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\gamma(j)| < \infty.$$

35. Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum. Bezeichne I die Identität auf $\mathcal{H}$.

a) Der Operator $P_{\mathcal{M}}$ ist linear und stetig und bildet $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}$ ab, und $I - P_{\mathcal{M}}$ bildet $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{M}^{\perp}$ ab.

b) Es gilt $x \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn $P_{\mathcal{M}}x = x$, und es gilt $x \in \mathcal{M}^{\perp}$ genau dann, wenn $P_{\mathcal{M}}x = 0$.

c) Sind $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ abgeschlossene lineare Teilräume von $\mathcal{H}$, so gilt $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ genau dann, wenn $P_{\mathcal{M}_1} P_{\mathcal{M}_2} = P_{\mathcal{M}_1}$.