Sonderübung Elementare Zahlentheorie SS 2016

Diese Sonderübung ist nicht wie die Klausur aufgebaut und wurde ohne Absprache mit dem Dozenten erstellt. Alle Übungsaufgaben der 12 Blätter sollten gelöst werden können. Aus diesem Grund werden hier kaum Rechenaufgaben betrachtet, weil es sich nicht lohnt, diese erneut vorzurechnen. Stattdessen konzentriert sich diese Übung darauf, Beweisideen zu liefern, mit denen man gegebenenfalls Beweise in der Klausur besser lösen kann.
Da die Zeit nicht ausreicht um alle Aufgaben zu besprechen, werden nur die blau markierten Aufgaben besprochen. Dennoch betrachten wir es als „lohnenswert“, sich über alle Aufgaben Gedanken zu machen bzw. zu lösen. Für diese werden ebenfalls später Hinweise veröffentlicht.

Elementares und Restklassenarithmetik

Aufgabe 1. Es sei $a_k \dots a_2 a_1$ die Dezimaldarstellung der Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $11 \mid n \Leftrightarrow$ Die alternierende Quersumme $(-1)^{k+1} a_k + \dots - a_2 + a_1$ von n ist durch 11 teilbar.

Aufgabe 2. Es sei $a_{3k} \dots a_2 a_1$ die Dezimaldarstellung der Zahl $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $7 \mid n \Leftrightarrow 7 \mid ((-1)^{k+1} a_k a_{k-1} a_{k-2} + \dots - a_6 a_5 a_4 + a_3 a_2 a_1)$.
Zum Beispielt teilt 7 die Zahl 122842398, denn $398 - 842 + 122 = -322 = 7 \cdot (-46)$.

Aufgabe 3. Zeige für $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, dass

$$42 \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \Rightarrow 42 \mid \sum_{i=1}^{n} a_i^7.$$

Aufgabe 4. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $42 \mid n^7 - n$.

Aufgabe 5. Es gelte für $n, p \in \mathbb{N}$, p prim, dass $(n, p) = 1$, $p \mid x - y$, $p \nmid x, y$.
Zeige: $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y)$. Gilt eine ähnliche Aussage für $x^n + y^n$?

Aufgabe 6. Zeige für $a, b, c \in \mathbb{Z}$, dass $9 \mid a^3 + b^3 + c^3 \Rightarrow 3 \mid a$ oder $3 \mid b$ oder $3 \mid c$.

Aufgabe 7. Zeige für $n \in \mathbb{Z}$, dass $n^2 + n + 1$ keinen Teiler der Form $6k - 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$ besitzt.

Aufgabe 8. Zeige, dass $a^4 + 4b^4$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ niemals eine Primzahl ist.

Aufgabe 9. Man wählt aus $\{1, \ldots, 2n + 1\}$ eine Menge von $n + 1$ verschiedenen Zahlen. Zeige, dass es unter den gewählten Zahlen mindestens zwei zueinander teilerfremde gibt und es eine gibt, welche durch eine andere ausgewählte Zahl teilbar ist.

Aufgabe 10. Zeige: Ist für $a, d, n \in \mathbb{Z}$ keine der Zahlen $a, a + d, \ldots, a + d(n - 1)$ durch n teilbar, so gilt $(n, d) = 1$.

Aufgabe 11. Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $4k + 3$ mit $k \in \mathbb{N}$ gibt. (Hinweis: vgl. Satz von Euklid)

Vollkommene Zahlen

Aufgabe 12. Jede gerade vollkommene Zahl endet mit der Ziffer 6 oder 8.

Aufgabe 13. Man bestimme alle geraden vollkommenen Zahlen der Form $a^a + 1$ mit $a \in \mathbb{N}$.

Kongruenzen, diophantische Gleichungen, Summen von Quadraten

Aufgabe 14. Berechne alle Lösungen der Gleichung $42x + 9y = 15$.

Aufgabe 15. Berechne alle Lösungen der Gleichung $42x + 9y = 4$.

Aufgabe 16. Wir haben eine unbekannte Anzahl von weniger als 100 Nachklausuren. Wenn man sie in Dreiergruppen zählt, bleiben zwei übrig. Wenn man sie in Fünfergruppen zählt, bleiben drei übrig. Wenn man sie in Siebenergruppen zählt, bleiben zwei übrig. Um wieviele Klausuren handelt es sich?

Aufgabe 17. Zeige für beliebige teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$, dass $m^{3\phi(n)} + n^{7\phi(m)} \equiv 1 \pmod{mn}$ gilt.

Aufgabe 18. Zeige, dass von vier aufeinanderfolgenden Zahlen nicht jede als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist.

Aufgabe 19. Wenn eine natürliche Zahl die Summe von zwei rationalen Quadraten ist, ist sie auch die Summe von zwei ganzen Quadraten.

Aufgabe 20. Sei $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ normiert und $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $p(\alpha) = 0$. Zeige, dass $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 21. Zeige, dass es überabzählbar viele transzendente Zahlen gibt.

Quadratische Reste etc.

Aufgabe 22. Zeige, dass Für eine natürliche Zahl n es eine ganze Zahl a gibt, sodass: $\left(\frac{a}{n}\right) = 1 \not\Rightarrow a \equiv x^2 \pmod{n}$ für ein $x \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 23. Für welche Primzahlen p gilt $\left(\frac{10}{p}\right) = 1$?

Aufgabe 24. Zeige: Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $8k + 7$.

Aufgabe 25. Besitzt die Gleichung $4X^2 + 7X + 11 \equiv 0 \pmod{391}$ eine Lösung?

Aufgabe 26. Sei p prim. Zeige, dass sich unter den Zahlen $\{1, 2, \ldots, \lfloor\sqrt{p}\rfloor + 1\}$ ein quadratischer Nichtrest modulo p befindet.(Hinweis: Widerspruch)

Aufgabe 27. Seien l, p verschiedene ungerade Primzahlen und

$$\tau := \sum_{a \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*} \left(\frac{a}{l}\right) e^{\frac{2\pi i a}{l}}.$$

Man zeige, dass

$$\tau^2 = \left(\frac{-1}{l}\right) l.$$

Bemerkung: Man kann mithilfe dieser Gleichung, dem Eulerschen Kriterium und den beiden Ergänzungssätzen sehr schnell das quadratische Reziprozitätsgesetz herleiten.

Aufgabe 28. Sei p eine Primzahl, sodass $p \equiv 2 \pmod{3}$ und $(a, p) = 1$. Zeige, dass $x^3 \equiv a \pmod{p}$ die eindeutige Lösung $x \equiv a^{\frac{(2p-1)}{3}}$ besitzt.

Kettenbrüche

Aufgabe 29. Man berechne $[2, \overline{1, 2, 1}]$.

Aufgabe 30. Man bestimme die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ und $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aufgabe 31. Man zeige, dass für $D \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + D^2)^{\frac{1}{2}} = [D, \overline{2D}]$.