Den 11. April, 2008.

4. Der Raum der Zahlenfolgen $l_p (p \geq 1)$. Es sei X der Raum der reeler Zahlenfolgen $x = (\xi_1, \xi_2, , , , \xi_n, ...)$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty$. Wir definieren den Abstand durch

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Sofort bestätigt man, dass die Axiome der Metrik 1 und 2 erfüllt sind. Das Axiom 3 folgt aus der Ungleichung von Minkowski für Summen. Wir haben

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p \right)^{1/p}.$$

Weil nach Voraussetzung die Reihen

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p$$

konvergieren, erhalten wir den Grenzübergang $n \to \infty$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Damit ist gezeigt, dass $d(x,y)$ die den Abstand in l_p definiert, fuer beliebige $x, y \in l_p$ einen Sinn besitzt. Gleichzeitig zeigt die letzte Ungleichung, dass der Axiom 3 in l_p gilt. Die Konvergenz einer Folge $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, ...\xi_j^{(n)}, ...)$ gegen ein Element $x = (x_1, x_2, ...x_j, ...)$ im Raum $l_p (p \geq 1)$ bedeuted, dass

1. $\xi_j^{(n)} \to \xi_j$, für $n \to \infty$ für alle j und
2. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N_0 = N_0(\varepsilon)$ so dass

$$\left(\sum_{j=N+1} |\xi_j^{(n)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon$$

ist für $N \geq N_0$ und beliebiges n.

0.1 Separabele und vollständige metrische Räume.

Definition 0.1 *Eine Menge $M \subset X$ nennt man dicht in einer Menge $N \subset X$, wenn $N \subseteq \overline{M}$(d.h. zu jedem $x \in N$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in M$ existiert, so dass $d(x,y) < \varepsilon$. Speziell heisst M überall dicht in einem Raum X, wenn $\overline{M} = X$. Schliesslich ist M niergends dicht in einem Raum X, wenn jede Kugel dieses Raumes eine Kugel enthält, die frei von Punkten der Menge M ist.*

Definition 0.2 *Ein metrischer Raum heisst separabel, wenn in ihm eine abzaehlbare dichte Teilmenge existiert.*

Die Raume R^n, C sind separabel.

Fuer den Raum R^n ist die Bahauptung klar: als abzaehlbare dichte Menge kann man die Menge aller Punkte mit rationalen Koordinaten nehmen.

Im Raum C ist die Menge aller rationalen Polynome mit rationalen Koeffizienten dicht. Nach dem Satz von Weierstrass laest sich jede stetige Funktion durch Polynome gleichmaessig aproximieren. Es ist weiterhin moeglich durch eine kleine Aenderung eines Polynoms seine koeffizienten rational zu machen(da rationale Zahlen dicht in R sind). Deshalb gibt es zu jeder stetigen Funktion $f(t)$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten, das bezueglich der Metrik in C beliebig nahe bei $f(t)$ liegt.

Nicht jeder metrischer Raum ist separabel.Beispel: Es sei m die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen. Setzen wir

$$d(x,y) = \sup_{j \in N} |x_j - y_j|$$

dann erhalten wir ein metrischer Raum, der nicht separabel ist. Um das zu zeigen, nehmen wir alle Folgen, die aus Nullen und Einsen bestehen. Sie bilden eine Menge von der Mächtigkeit Kontinunms(warum?). Der Abstand zwischen zwei solchen Punkten 1 ist. Um jeden dieser Punkte legen wir eine offene Kugel vom Radius 1/2. Diese Kugeln schneiden sich nicht. Wenn nun eine Menge in m überall dicht ist, dann muss jede Kugel wenigstens einen Punkt aus dieser Menge enthalten, und diese kann folglich nicht abzählbar sein.

Definition 0.3 *Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen eines metrischen Raumes X heisst konvergent in sich oder Fundamentalfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so dass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist für $m, n \geq N_0$.*

Wenn im Raum X jede Fundamentalfolge konvergiert, dann heisst dieser Raum *vollständig*.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass wenn eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, so konvergiert sie in sich(Aufgabe)!. Die umgekehrte Behauptung für einen beliebigen metrischen Raum ist falsch. Im folgenden wollen wir einige vollständige Räume betrachten.

1. Die Vollständigkeit von R^n. Sei $x^{(m)}$ eine Fundamentalfolge von Punkten R^n. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0 , so dass $\sum_{k=1}^{n}(x_k^{(m)} - x_k^{(p)})^2 < \varepsilon^2$ ist für $m, p \geq N_0$. Daraus erhalten wir $|x_k^{(m)} - x_k^{(p)}|^2 < \varepsilon$.

Also ist $\{x_k^{(p)}\}$ eine Fundamentafolge in R^1. Es sei $x_k^{(p)} \to x_k$ und $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Dann ist offenbar $\lim_{n\to\infty} x^{(p)} = x$.

2. Die Vollständigkeit des Raumes $C[a,b]$. Wir nehmen eine Fundamentafolge $\{x_n(t)\}$ in $C[a,b]$, d.h.: zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N_0 , so dass

$$\max_{0\leq t\leq 1} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon$$

ist für $m, n \geq N_0$. Dann gilt auch $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon, \quad (m, n \geq N_0$ für alle $t \in [0,1]$ Hieraus folgt, dass die Folge $\{x_n(t)\}$ gleichmässig konvergiert. Dann ist der Grenzwert auch eine stetige Funktion. Lassen wir nun m in vorhergehenden Ungleichung gegen Unendlich streben, so erhalten wir $|x(t)-x_n(t)| < \varepsilon$, für alle t und $n \geq N_0$. D.h. dass $d(x_n, x) \to 0$ und deswegen $\{x_n(t)\}$im Sinne der Metrik des Raumes $C[a,b]$ gegen $x(t)$ konvergiert.

3. Die Vollständigkeit des Raumes $l_p(1 \leq < \infty)$**.** Um das zu zeigen, nehmen wir eine Fundamentalfolge $\{x^{(n)}\}$ in l_p. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_0, so dass

$$d^p(x^{(m)}, x^{(n)}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon. \tag{1}$$

für $m, n \geq N_0$. Dann haben wir die Ungleichung $|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon$ für jedes k. D.h. für jedes k ist die reele Zahlenfolge $\{x^{(n)}\}$ Fundamentalfolge und daher konvergiert. Wir setzen nun $x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$ und bezeichnen die Folge $(x_1, x_2, ..., x_k, ..)$ mit x. Dann ist zu zeigen:

$a)$ $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$

$b)$ $\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)}, x) = 0$.

Wir zeigen erst $a)$. Aus (1) folgt, dass für beliebiges festes M die folgende Ungleichung $\sum_{k=1}^{M} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon$ gilt. Hier haben wir endlich viele Summanden, und wir können bei festgehaltenem n den Grenzübergang $m \to \infty$ ausführen. Dann erhalten wir $\sum_{k=1}^{M} |x_k - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon$ was für jedes m richtig ist. Durch den Grenzübergang $M \to \infty$ können wir wieder zur unendlichen Reihe übergehen: $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon$ und die Konvergenz der letzter Reihe bewiesen. Aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|^p$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$(warum?). Damit ist der Punkt $a)$ bewiesen.

b) Für beliebig klein ε hatten wir $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p < \varepsilon$. Deswegen

$$\lim_{n\to\infty} d(x^{(n)}, x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} = 0$$

d.h. $x^{(n)} \to x$ in der Metrik des l_p.

Es gibt metrische Räume, in den Folgen gibt, die zwar in sich konvergieren, aber nicht gegen einen Grenzwert aus dem Raum streben.

Beispiel 1. Es sei X die Menge der rationalen Zahlen mit dem Abstand: $d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$. Dann ist X ein metrischer Raum. Die Folge $r_n = (1 + 1/n)^n$ ist Fundamentalfolge, hat aber im Raum X keinen Grenzwert, da $r_n \to e$, wenn $n \to \infty$, die keine rationale Zahl ist.

Beispiel 2. X sei der Raum der Polynome $P(t)$ mit der Metrik

$$d(P,Q) = \max_{0 \le t \le 1} |P(t) - Q(t)|.$$

Es sei $\{P_n(t)\}$ eine Folge von Polynomen, die gleichmässig gegen eine stetige Funktion konvergiert,die kein Polynom ist. Offensichtlich ist die Folge $\{P_n(t)\}$ eine Fundamentalfolge, die aber keinen Grenzwert im Raum X besitzt.

Der Cantorsche Durchschnittssatz. In der Theorie der metrischen Raume spielt der folgende Satz eine Role, die in Analysis Intervalschachtelungsprinzip genannt wurde.

Theorem 0.4 *Ein metrischer Raum ist genau dann vollstaendig, wenn in ihm jede Folge von ineinandergeschachtelten abgeschlossenen Kugeln, deren Radien gegen Null streben, einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.*

Beweis Notwendigkeit. Der Raum X sei vollstaendig, und es sei $B_1,\ B_2, ...$ eine Folge von ineinandergeschachtelten abgeschlossenen Kugeln. Der Radius der Kugel B_n sei r_n und der Mittelpunkt x_n. Die Folge $\{x_n\}$ ist dann eine Fundamentalfolge, weil $d(x_n, x_m) < r_n$ fuer $m > n$ und $r_n \to 0$ fuer $n \to \infty$. Also existiert $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$, da X vollstaendig ist. Es ist klar, dass $x \in \cap B_n$. Die Kugel B_n enthaelt naemlich alle Punkte der Folge x_n, eventuell mit Ausnahme der Punkte $x_1, x_2, , x_{n-1}$. Somit ist x Haefungspunkt jeder Kugel B_n. Da B_n abgeschlossen ist, folgt $x \in B_n$ fuer alle n.

Die Bedingung ist auch *hinreichend.* Es sei $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge und wir wollen zeigen, dass sie einen Grenzwert hat, der zu X gehoert. Fuer $\varepsilon = 1/2$ existiert ein Punkt x_{n_1}, so dass $d(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ fuer alle $n \ge n_1$. Wir nehmen *Punkt* x_{n_1} als Zentrum einer abgeschlossenen Kugel vom Radius 1 und bezeichnen diese Kugel mit B_1. Danach waehlen wir x_{n_2} aus $\{x_n\}$ so dass $n_2 > n_1$ und $d(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ ist fuer $n \ge n_2$. B_2 sei die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt x_{n_2} und dem Radius $1/2$. Sind allgemein die Punkte $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_k}, , (n_1 < n_2 < \ < n_k)$ bereits gewaehlt, so waehlen wir einen Punkt $x_{n_{k+1}}$ so, dass $n_{k+1} > n_k$ ist und $d(x_n, x_{n_{k+1}}) < 1/2k + 1$. Als B_{k+1} nehmen wir die abgeschlossene Kugel um $x_{n_{k+1}}$ fuer alle $n \ge n_{k+1}$ mit dem Radius $1/2^k$. Setzen wir diese Konstruktion fort, so erhalten wir eine Folge von ineinandergeschachtelten abgeschlossenen Kugeln B_k, wobei die Kugel B_k den Radius $1/2k$ besitzt. Diese Kugelfolge hat nach Voraussetzung einen gemeinsamen Punkt, wir bezeichnen ihn mit x. es ist klar, dass dieser Punkt x der Grenzwert der Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ ist. Damit haben wir bewiesen, dass x_n eine Fundamentalfolge ist, die eine konvergierte Teilfolge hat. D.h. x_n auch eine konvergierte Folge ist. $\triangleright$