

Differentialgeometrie.

Die elementare Geometrie untersucht Figuren, die durch ~~eine~~ einzelne Punkte, Geraden, Ebenen, Kreise und Kugeln bestimmt sind. Die Differentialgeometrie hat es mit allgemeineren, weniger genau bestimmten Figuren zu tun. Z.B. kann man differentialgeometrische Sätze aufstellen, die für alle konvexen geschlossenen Flächen, etwa die Oberfläche eines Hühnereis, gelten. Insofern kommt die Differentialgeometrie mehr als die Elementargeometrie der Erfahrungswelt entgegen, deren Gestalten sich natürlich nicht ~~mit~~ in den Rahmen der elementaren Geometrie, wohl aber in den der Differentialgeometrie einfügen.

Die Differentialgeometrie ~~kann~~ ~~hat~~ hat nicht nur gegebene Figuren zu beschreiben, sondern auch Figuren zu entdecken, von denen man gewisse Eigenschaften verlangt. So kann man nach denjenigen konvexen geschlossenen Flächen fragen, die sich zwischen zwei festen parallelen ebenen Platten in jede Stellung bringen lassen und dabei stets jede der beiden Platten in einem Punkt berühren. Eine Kugel mit dem Plattenabstand als Durchmesser hat offenbar diese Eigenschaft. Die Differentialgeometrie lehrt aber, daß es noch ~~✓~~ viele andere solche Flächen gibt. Ein anderes Beispiel: Wenn ein Körper aus homogenem Material vom spezifischen Gewicht $\frac{1}{2}$ im Wasser schwimmt, so taucht er zur Hälfte seines ~~Volumens~~ Volumens ein. Wenn ~~man~~ aber ein solcher Körper eine unregelmäßige Gestalt hat und man ihn bis zur Hälfte ins Wasser taucht und dann losläßt, wird er nicht ruhig schwimmen, sondern schaukeln und eine bestimmte Gleichgewichtslage suchen. Fragen wir nun: Welche Gestalt muß ~~✓~~ ein homogener Körper vom spezifischen Gewicht $\frac{1}{2}$ haben, damit er in beliebiger Stellung zur Hälfte eingetaucht ruhig schwimmt? Es ist klar, daß ein Körper von Kugelgestalt diese Eigenschaft hat. Aber man weiß bis heute nicht, ob ein solcher Körper nicht auch vielleicht eine andere Gestalt haben kann. Ebensowenig weiß man, ob ein Balken notwendig kreisförmigen Querschnitt haben muß, damit er im Wasser, falls nur seine Achse horizontal liegt und er tief genug eintaucht, in keiner Stellung schaukelt.

Unter den Eigenschaften, die zur differentialgeometrischen Bestimmung von Figuren herangezogen werden, gibt es eine bestimmte Kategorie, die durch ihre physikalische Bedeutung vor allen andern ausgezeichnet ist. Das ist die Kategorie der sogenannten Extremaleigenschaften. Da wird verlangt, daß unter gewissen Nebenumständen irgendeine mit einer Figur verbundene Maßzahl möglichst groß oder möglichst klein werde. Die Aufgabe, eine Figur aus einer Extremaleigenschaft ~~en~~ zu bestimmen, nennt man ein Extremalproblem. Folgendes Extremalproblem wurde schon in der Antike behandelt: Ein undehnbares geschlossenes Band soll in der Ebene so hingelegt werden, daß es eine möglichst große Fläche umschließt. Lösung: Das Band muß kreisförmig gelegt werden. Anderes Extremalproblem: In einen geschlossenen Draht beliebig vorgegebener Form soll ein Flächenstück eingespannt werden, das möglichst kleine Oberfläche hat. Dieses Problem kann man physikalisch lösen, wenn der Draht eine nicht allzu komplizierte Gestalt hat: Taucht man den Draht in Seifenlösung und zieht ihn wieder heraus, so ist in ihn eine Seifenhaut gespannt, und die Physik lehrt, daß diese Haut gerade die richtige Gestalt hat. Daß es aber bei beliebiger Gestalt des Drahts überhaupt ein solches Flächenstück gibt (und erst recht, wie es dann aussieht), kann man natürlich nicht auf diese Weise entscheiden. Das ist ein differentialgeometrisches Problem, das jahrzehntelang von mehreren bedeutenden Forschern bearbeitet und erst vor 3 Jahren gelöst wurde.

Zwei Punkte einer gegebenen ~~Kurve~~ Fläche sollen durch einen auf der Fläche verlaufenden Weg verbunden werden, der möglichst kurz ist. Ist die Fläche konvex und völlig glatt, so kann man dieses Problem wiederum physikalisch lösen, indem man auf der Seite, nach der die Fläche gewölbt

2
ist, einen Gummifaden ~~zwei~~ zwischen die Punkte einspannt. Der Faden nimmt dann die gesuchte Gestalt an. Kurvenbögen dieser Extremaleigenschaft nennt man geodätische Linien. Ihre mathematische Bestimmung im allgemeinen Fall ist nicht schwer.

Die Beschäftigung mit den geodätischen Linien hat nun der Entwicklung der Differentialgeometrie einen entscheidenden Impuls gegeben und ein ganz selbständiges Teilgebiet der Differentialgeometrie, die Riemannsche Geometrie, ins Leben gerufen. ~~Jetzt~~ Sucht man nämlich die geodätischen Linien im einfachsten Fall, wenn die gegebene Fläche eine Ebene ist, so erhält man offenbar die geraden Linien. Die Geraden sind also ein Spezialfall der geodätischen Linien. Untersucht man auf einer beliebigen Fläche Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks aus geodätischen Linien, so erhält man eine allgemeine Theorie, die die elementare Dreiecksgeometrie der Ebene als Spezialfall enthält. Ähnlich lassen sich auch viele andere Fragen der elementaren Geometrie der Ebene einer allgemeinen Theorie unterordnen, die mit den Längen geodätischer Linien und den Winkeln zwischen solchen Linien operiert, und zwar auf einer beliebigen Fläche.

Die analytische Geometrie ermöglicht durch die Einführung der Koordinaten, alle Aussagen der ebenen Elementargeometrie von der räumlichen Anschauung unabhängig zu machen; diese Aussagen verwandeln sich in Systeme von Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen, eben den Koordinaten der Punkte der Ebene. ~~Jetzt~~ Die räumliche Elementargeometrie führt in derselben Weise auf Gleichungen zwischen 3 Veränderlichen. Die Gleichung einer Ebene oder einer Kugel im Raum hat genau dieselbe Struktur wie die Gleichung einer Geraden oder eines Kreises in der Ebene. Es macht keine wesentlichen Schwierigkeiten, auch Gleichungen zwischen 4 oder noch mehr Veränderlichen ähnlich zu interpretieren, wie es uns die Anschauung im Falle von 2 oder 3 Veränderlichen, also der Geometrie der Ebene oder des Raums, lehrt. So kommt man zur Einführung der mehr als 3-dimensionalen Räume. Diese Begriffsbildung, die im vorigen Jahrhundert entstanden ist, macht heute keinem Mathematiker Schwierigkeit.

Nun kann man seit Gauß auch die Theorie der Längen und Winkel geodätischer Linien auf einer Fläche analytisch so behandeln, daß alles auf Gleichungen zwischen 2 Veränderlichen herauskommt. Nur sind diese Gleichungen allgemeiner und komplizierter als die der ebenen Elementargeometrie, die jetzt als allereinfachster Fall sich der allgemeinen analytischen Flächengeometrie einordnet. ~~Jetzt~~ Von Riemann stammt der Ansatz, auch diese allgemeine Theorie gerade so wie die analytische Geometrie der Ebene auf mehr als 2 Veränderlichen zu übertragen. So entstand die allgemeine 2-, 3- oder mehrdimensionale Riemannsche Geometrie.

Die 3-dimensionale Riemannsche Geometrie enthält als Spezialfall die räumliche Elementargeometrie. Mehr noch: Beschränkt man sich auf Punkte, deren Koordinaten sich von denen eines beliebig herausgegriffenen Punkts sehr wenig unterscheiden, d.h. betrachtet man nur eine kleine Umgebung jenes festen Punkts, so unterscheiden sich die ~~Beziehungen~~ Relationen der Riemannschen Geometrie fast garnicht von denen der Elementargeometrie. Betrachtet man z.B. im Riemannschen Raum ein Dreieck mit sehr kurzen geodätischen Seiten, so ist dessen Winkelsumme zwar nicht genau, aber fast genau 2 Rechte, wie bei graden Dreiecken der Elementargeometrie. Deshalb hat Riemann die Frage aufgeworfen, ob man nicht bei der physikalischen Beschreibung der Wirklichkeit besser eine allgemeine Riemannsche Geometrie als den ganz speziellen Fall der gewöhnlichen Elementargeometrie zugrundelegen solle; denn da unsere Messungen nur einen sehr kleinen Teil

3
des Weltraums erfassen und nicht ganz genau sind, können wir nicht entscheiden, ob z.B. ein aus kurzen Schnüren gespanntes Dreiecks den Gesetzen der Elementargeometrie oder denen einer allgemeineren Riemannschen Geometrie folgt, in der die Abweichung der Winkelsumme unterhalb der Genauigkeitsgrenze liegt.

Es ist hierbei nachzutragen, daß Lobatschewskys nichteuklidische Geometrie ebenfalls ein Spezialfall der Riemannschen Geometrie ist. Riemann hat also die philosophische Fragestellung Lobatschewskys verallgemeinert.

Bekanntlich hat seit Einstein die moderne Physik tatsächlich den Schritt getan, den Riemann als möglich nachgewiesen hat. Die Messungen der modernen Atomphysik und Astronomie, die weit genauer sind als zu Riemanns Zeit, zeigen, daß die euklidische Geometrie für feine Messungen so ungeeignet ist, wie das Ptolemäische geozentrische Weltsystem für die moderne Astronomie.

Die physikalische Bedeutung der Theorie führte zu großen Vervollkommnungen der nötigen Rechenmethoden. Die Tensorrechnung erlaubt es z. B. 256 Gleichungen durch 7 Zeichen auszudrücken. In einem modernen Lehrbuch wird bei einer speziellen Erläuterung die Tensorrechnung vermieden und die ältere Methode beibehalten mit der Begründung: "Würden wir hier die Tensorrechnung anwenden, so würde der Gang der Rechnung dermaßen beschleunigt werden, daß wir ihr nicht zu folgen vermöchten".

Ueber der großen Entwicklung des formalen Apparats drohte der Zusammenhang der Riemannschen Geometrie mit der eigentlichen anschaulichen Geometrie verloren zu gehen. In der allerletzten Zeit erst treten in den ~~Vordergrund~~// bei den Untersuchungen der Riemannschen Geometrie wieder rein geometrische Probleme in den Vordergrund. Es handelt sich um zwei- oder dreierlei Problemkreise, die leider ohne Zuhilfenahme von Fachausdrücken nur sehr unklar zu beschreiben sind.

Zunächst stellt man heute hinsichtlich der Riemannschen Geometrie ähnliche prinzipielle Fragen, wie sie in der Elementargeometrie schon seit Euklid, besonders aber seit Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie behandelt werden: Man sucht nach einem System möglichst weniger und möglichst einfacher Axiome, aus denen alle weiteren Schlüsse rein logisch, ohne Zusatzhypothesen folgen. Die Axiomatik der Differentialgeometrie hat gegenüber der Axiomatik der Elementargeometrie die Zusatzaufgabe, daß der Begriff des Unendlichkleinen miteingefasst werden muß.

Ferner werden neuerdings Riemannsche Räume in ihrer Gesamterstreckung untersucht, während man früher hauptsächlich die Geometrie kleinerer Teilgebiete Riemannscher Räume betrachtete. Bleiben wir beim einfachsten Fall, der 2-dimensionalen Riemannschen Geometrie, also der Flächentheorie. Ein kleines Stück eines Paraboloids unterscheidet sich vom differentialgeometrischen Standpunkt nicht prinzipiell von einem Stück eines Ellipsoids. Als ganzes betrachtet aber sind Paraboloid und Ellipsoid prinzipiell verschieden; auf der einen Fläche kann man sich von einem Punkt beliebig weit entfernen, auf der andern nicht. Unterscheidungen dieser Art führen zu interessanten geometrischen Erkenntnissen, die auch für die Physik von Bedeutung sind. Es ist bis jetzt unbekannt, ob unsere physikalische Welt es gestattet, daß man sich von irgendeinem Punkt beliebig weit entfernt, oder sie sich so verhält, wie (wenn wir von 3 zu 2 Dimensionen herabsteigen), die Fläche der Kugel oder des Ellipsoids.

S. E. Cohn-Vossen.