

Diskrete dynamische Systeme

Ergebnisse der Arbeitsgemeinschaft

Sebastian Klein

5. August 2002

1 Das Feigenbaum-Diagramm

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Problemstellung, das Wachstumsverhalten einer Tierpopulation mathematisch zu modellieren. Wir gehen davon aus, dass es bei der betrachteten Tierart klar definierte Generationen gibt — dies ist beispielsweise bei den meisten Insektenarten der Fall — so dass es Sinn macht, von der Größe der Population in der n -ten Generation zu sprechen. Dann ist die Theorie der diskreten dynamischen Systeme der geeignete Rahmen für unser Modell.

Das einfachste Modell geht von einer Vervielfachung der Population um einen konstanten Faktor q von jeder Generation zur nächsten aus. Bezeichnet also x_n die Größe der n -ten Generation, so gilt

$$x_{n+1} = q \cdot x_n .$$

Hieraus erhält man

$$x_n = q^n \cdot x_0 ;$$

dabei ist x_0 der als bekannt vorausgesetzte Startwert der “Iteration”, also die Größe der Population bei Beginn unserer Betrachtungen.

Betrachten wir beispielsweise $q = 2$ und $x_0 = 2$, so erhalten wir die folgende Entwicklung:

n	0	1	2	3	4	5	...	10	11	12	13	...	20	...
x_n	2	4	8	16	32	64	...	2048	4096	8192	16384	...	2097152	...

Es ist also offensichtlich, dass dieses Modell zumindest für längere Zeiträume nicht realistisch ist.

Eine feinsinnigere Betrachtung geht auf P.F. VERHULST zurück. Dieser ging von der Modellvorstellung aus, dass es für eine bestimmte Tierart in einem klar definierten Territorium eine Zahl N gibt, so dass die Wachstumsrate der Population proportional zur Abweichung der momentanen Population von N ist. Daraus erhielt er 1845 das “normierte” Wachstumsgesetz

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) , \quad (*)$$

das man heute als *Verhulst-Gleichung* oder *logistische Gleichung* (nach lat. logis = Lebensraum) bezeichnet. “Normiert” bedeutet hierbei, dass die Größe x_n das Verhältnis der Populationsgröße zur maximal möglichen angibt. Somit gilt stets $0 \leq x_n \leq 1$. Um diese Beziehung zu sichern, muss die Konstante r in Formel (*) zwischen 0 und 4 liegen. Diese Konstante ist für die betrachtete Tierart und das Territorium charakteristisch, und beschreibt die prinzipiell mögliche Lebensqualität (Wüste/Regenwald/Schlaraffenland).

Betrachten wir nun den Verlauf der Iteration für verschiedene Werte von r ; hierbei wählen wir als Startwert jeweils $x_0 = 0.5$:

	$r = 0.5$	$r = 0.8$	$r = 1.5$	$r = 2.2$	$r = 2.7$	$r = 3.2$	$r = 3.5$	$r = 3.6$	$r = 3.83$	$r = 3.9$
x_0	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000	0.50000
x_1	0.12500	0.20000	0.37500	0.55000	0.67500	0.80000	0.87500	0.90000	0.95750	0.97500
x_2	0.05469	0.12800	0.35156	0.54450	0.59231	0.51200	0.38281	0.32400	0.15586	0.09506
x_3	0.02585	0.08929	0.34195	0.54564	0.65199	0.79954	0.82693	0.78849	0.50390	0.33550
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{10}	0.00019	0.01363	0.33340	0.54545	0.62771	0.51304	0.38282	0.45783	0.95742	0.10401
x_{11}	0.00010	0.01076	0.33337	0.54545	0.63096	0.79946	0.82694	0.89360	0.15614	0.36345
x_{12}	0.00005	0.00851	0.33335	0.54545	0.62869	0.51304	0.50088	0.34229	0.50464	0.90228
x_{13}	0.00002	0.00675	0.33334	0.54545	0.63028	0.79946	0.87500	0.81045	0.95742	0.34387
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_{20}	0.00000	0.00138	0.33333	0.54545	0.62958	0.51304	0.50088	0.33142	0.15615	0.32783
x_{21}	0.00000	0.00110	0.33333	0.54545	0.62967	0.79946	0.87500	0.79769	0.50467	0.85940
x_{22}	0.00000	0.00088	0.33333	0.54545	0.62960	0.51304	0.38282	0.58097	0.95742	0.47125
x_{23}	0.00000	0.00070	0.33333	0.54545	0.62965	0.79946	0.82694	0.87640	0.15615	0.97178
x_{24}	0.00000	0.00056	0.33333	0.54545	0.62962	0.51304	0.50088	0.38997	0.50467	0.10697
x_{25}	0.00000	0.00045	0.33333	0.54545	0.62964	0.79946	0.87500	0.85642	0.95742	0.37255
x_{26}	0.00000	0.00036	0.33333	0.54545	0.62962	0.51304	0.38282	0.44268	0.15615	0.91165
x_{27}	0.00000	0.00029	0.33333	0.54545	0.62963	0.79946	0.82694	0.88817	0.50467	0.31412
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Wir machen die folgenden Beobachtungen:

- Für $r = 0.5$ und $r = 0.8$ konvergiert die “Iterationsfolge” gegen 0; das bedeutet: die Tierpopulation stirbt aus.
- Für $r = 1.5$, $r = 2.2$ und $r = 2.7$ konvergiert die “Iterationsfolge” gegen einen festen Grenzwert, der größer als 0 ist; das bedeutet: die Größe der Population pendelt sich auf einen festen Wert ein.
- Für $r = 3.2$ konvergiert die Teilfolge (x_{2n}) der Iterationsglieder mit geradzahligem Index gegen einen Wert, die komplementäre Teilfolge (x_{2n+1}) jedoch gegen einen anderen Wert. Die “Iterationsfolge” springt also nach einer Einschwingphase annähernd zwischen zwei Werten hin und her. In entsprechender Weise springt sie im Falle $r = 3.5$ zwischen vier Werten und für $r = 3.83$ zwischen drei Werten.
- In den Fällen $r = 3.6$ und $r = 3.9$ ist keinerlei Regelmäßigkeit auszumachen.

Können wir diese Phänomene mathematisch verstehen?

Offenbar spielen diejenigen Werte $x_* \in [0, 1]$, die von der “Wachstumsfunktion” $f_r(x) := r \cdot x \cdot (1-x)$ auf sich selbst abgebildet werden — für die also $f_r(x_*) = x_*$ gilt — eine wesentliche Rolle. Solche Werte heißen *Fixpunkte* von f_r . Die Grenzwerte der in der obigen Tabelle angegebenen “Iterationsfolgen” für $r = 0.5$, $r = 0.8$, $r = 1.5$, $r = 2.2$, und $r = 2.7$ sind offensichtlich jeweils Fixpunkte von f_r .

Bestimmen wir also die Fixpunkte von f_r . Wegen $f_{r=0} \equiv 0$ können wir uns dabei auf den Fall $r > 0$ beschränken. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_r(x_*) = x_* &\iff rx_*(1-x_*) = x_* \\ &\iff (r-1)x_* - rx_*^2 = 0 \\ &\iff x_* \cdot (x_* - \frac{r-1}{r}) = 0 \\ &\iff x_* = 0 \quad \text{oder} \quad x_* = \frac{r-1}{r} \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass für jedes $r > 0$ die Funktion f_r “zwei” Fixpunkte besitzt, nämlich $x_* = 0$ und $x_* = \frac{r-1}{r}$. (Das Wort “zwei” steht in Anführungszeichen, weil im Falle $r = 1$ diese beiden Fixpunkte zusammenfallen.) Zu beachten ist jedoch, dass der Fixpunkt $\frac{r-1}{r}$ nur für $r \geq 1$ im Intervall $[0, 1]$ liegt, auf das wir unsere Untersuchungen beschränkt haben.

Wenn man die Iterationsfolge der f_r noch für weitere Werte von r ausrechnet, so sieht man, dass für $r \in]0, 1[$ die Iterationsfolge gegen den Fixpunkt 0 konvergiert; für $r \in]1, 3[$ hingegen gegen den Fixpunkt $\frac{r-1}{r}$. Weiter sieht man, dass die Iterationsfolge für $r > 3$ gegen keinen der beiden Fixpunkte konvergiert, sondern ein gänzlich anderes Verhalten zeigt.

Es gibt also offenbar verschiedene Qualitäten von Fixpunkten: solche, bei denen eine “in der Nähe” startende Iterationsfolge gegen den Fixpunkt konvergiert — diese heißen *anziehende* Fixpunkte — und solche, bei denen eine “in der Nähe” startende Iterationsfolge zumindest anfänglich vom Fixpunkt wegdriiftet — diese heißen *abstoßende* Fixpunkte.

Wie kann man anziehende von abstoßenden Fixpunkten unterscheiden? Hierzu gibt es ein ganz allgemeines Kriterium: Sei f eine Funktion mit einem Fixpunkt x_* ; in diesem Fixpunkt sei f differenzierbar. Dann gilt für die Ableitung $f'(x_*)$:

$$f'(x_*) = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_*)}^{=x_*}}{x - x_*} = \lim_{x \rightarrow x_*} \frac{f(x) - x_*}{x - x_*}.$$

Ist $|f'(x_*)| < 1$, so erkennen wir daraus, dass in diesem Falle x_* ein anziehender Fixpunkt von f ist. Ist hingegen $|f'(x_*)| > 1$, so ist x_* ein abstoßender Fixpunkt von f .

Dieses Kriterium wenden wir nun auf f_r an: Man erhält, dass der Fixpunkt 0 für $0 < r < 1$ anziehend und für $r > 1$ abstoßend ist; der Fixpunkt $\frac{r-1}{r}$ ist für $1 < r < 3$ anziehend, und für $r > 3$ abstoßend. Damit ist das Verhalten der Iterationsfolge von f_r (das ist die durch (*) beschriebene Folge $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$) für $r < 3$ erklärt; außerdem verstehen wir nun, warum die beiden Fixpunkte für $r > 3$ nicht mehr als Grenzwert der Iterationsfolge in Erscheinung treten.

Wir wollen nun das Verhalten der Iterationsfolge von f_r für Werte von r untersuchen, die "etwas" größer als 3 sind. Als typisches Beispiel wollen wir die Iterationsfolge zu $r = 3.2$ nehmen, die in der obigen Tabelle angegeben ist. Wir sehen, dass es hier offenbar zwei Zahlen x_a und x_b mit $f_r(x_a) = x_b$ und $f_r(x_b) = x_a$ gibt (im Falle $r = 3.2$ sind dies $x_a = 0.51304\dots$ und $x_b = 0.79946\dots$). Ein solches Paar von Zahlen nennt man einen *periodischen Orbit der Periode 2*.

Gehört eine Zahl x_a zu einem Orbit der Periode 2, so gilt $f_r(f_r(x_a)) = x_a$. Ist umgekehrt $x_a \in [0, 1]$ mit $f_r(f_r(x_a)) = x_a$ und gilt $f_r(x_a) \neq x_a$ (ist also x_a kein Fixpunkt von f_r), so bilden x_a und $x_b := f_r(x_a)$ einen Orbit der Periode 2 von f_r .

Um die 2-periodischen Orbits von f_r zu finden, haben wir also die Gleichung $f_r(f_r(x)) = x$ unter der zusätzlichen Bedingung $f_r(x) \neq x$ zu lösen. Setzt man in der Gleichung den Ausdruck $rx(1-x)$ für f_r ein, so erhält man die folgende Gleichung 4. Grades:

$$-r^3x^4 + 2r^3x^3 - (r^3 + r^2)x^2 + r^2x = 0.$$

Da die beiden Lösungen von $f_r(x) = x$, also die beiden Fixpunkte 0 und $\frac{r-1}{r}$ von f_r , unerwünscht sind, können wir eine Polynomdivision durch $x \cdot (x - \frac{r-1}{r})$ durchführen und erhalten die quadratische Gleichung

$$-r^3x^2 + (r^3 + r^2)x - (r^2 + r) = 0.$$

Man erkennt, dass diese Gleichung für $r < 3$ keine reellen Lösungen besitzt und dass sie für $r = 3$ die doppelte Lösung $\frac{2}{3} = \frac{3-1}{3}$ hat, die mit einem Fixpunkt von $f_{r=3}$ zusammenfällt. Für $r \leq 3$ gibt es also keine Orbits der Periode 2. Ist hingegen $r > 3$, so besitzt die Gleichung tatsächlich zwei verschiedene reelle Lösungen, nämlich

$$x_a := \frac{r+1 - \sqrt{(r-1)^2 - 4}}{2r} \quad \text{und} \quad x_b := \frac{r+1 + \sqrt{(r-1)^2 - 4}}{2r}.$$

In diesem Falle bilden also diese Werte x_a und x_b einen Orbit der Periode 2 von f_r .

Für $r = 3.2$ nähert sich die Iterationsfolge diesem Orbit an, für größere Werte von r sehen wir, dass dies nicht mehr der Fall ist. Also müssen wir, wie schon im Falle von Fixpunkten, zwischen anziehenden und abstoßenden periodischen Orbits unterscheiden. Die Punkte x_a und $x_b = f(x_a)$ eines Orbits der Periode 2 einer Funktion f sind insbesondere Fixpunkte von $f^2 := f \circ f$; daher sehen wir, sofern f in x_a und x_b differenzierbar ist, mit Hilfe des entsprechenden Kriteriums für Fixpunkte, dass der Orbit anziehend ist, wenn $|(f^2)'(x_a)| < 1$ gilt, und dass er abstoßend ist, wenn $|(f^2)'(x_a)| > 1$ gilt. Nach Kettenregel gilt dabei

$$(f^2)'(x_a) = f'(\underbrace{f(x_a)}_{=x_b}) \cdot f'(x_a) = f'(x_b) \cdot f'(x_a) = (f^2)'(x_b).$$

Wenden wir dieses Ergebnis nun auf f_r an. Es gilt:

$$(f_r^2)'(x_a) = f_r'(x_a) \cdot f_r'(x_b) = r^2 \cdot (1 - 2(x_a + x_b) + 4x_ax_b).$$

Weil x_a und x_b die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - \frac{r+1}{r}x + \frac{r+1}{r^2} = 0$ sind, gilt nach dem Satz von Vieta $x_a + x_b = \frac{r+1}{r}$ und $x_ax_b = \frac{r+1}{r^2}$. Damit ergibt sich:

$$(f_r^2)'(x_a) = -(r-1)^2 + 5.$$

Hieraus entnimmt man, dass der Orbit der Periode 2 von f_r anziehend ist für $3 < r < 1 + \sqrt{6} \approx 3.449\dots$ und abstoßend ist für $r > 1 + \sqrt{6}$.

Wir verstehen also nun, warum die Iterationsfolge zu $r = 3.2$ gegen diesen Orbit der Periode 2 konvergiert, und warum dies für $r > 1 + \sqrt{6}$ nicht der Fall ist.

Bei $r = 3.5$ liegt offenbar ein anziehender Orbit der Periode 4 vor. Dieser ließe sich prinzipiell mit denselben Methoden wie zuvor untersuchen, man hat jedoch (nach Abspaltung der unerwünschten Lösungen) die Nullstellen eines Polynoms 12. Grades zu finden. Da sich die Nullstellen eines Polynoms vom Grad ≥ 5 im Allgemeinen nicht durch eine Formel angeben lassen, muß man dabei numerische Methoden verwenden. Man stellt fest, dass es für alle $r > 1 + \sqrt{6} =: a_2$ einen Orbit der Periode 4 gibt, der anziehend ist, wenn r unter einem gewissen Wert a_3 liegt, und abstoßend ist für $r > a_3$.

Untersucht man das weitere Verhalten, so sieht man, dass genau für $r > a_3$ ein Orbit der Periode 8 existiert. Diese Regelmäßigkeit setzt sich fort: Es gibt eine unendliche Folge von Zahlen a_n , so dass für alle $r > a_n$ ein Orbit der Periode 2^n existiert; dieser ist für $a_n < r < a_{n+1}$ anziehend und für $r > a_{n+1}$ abstoßend. Die a_n heißen *Verzweigungsstellen*. Natürlich können die a_n für $n \geq 3$ nur numerisch bestimmt werden.

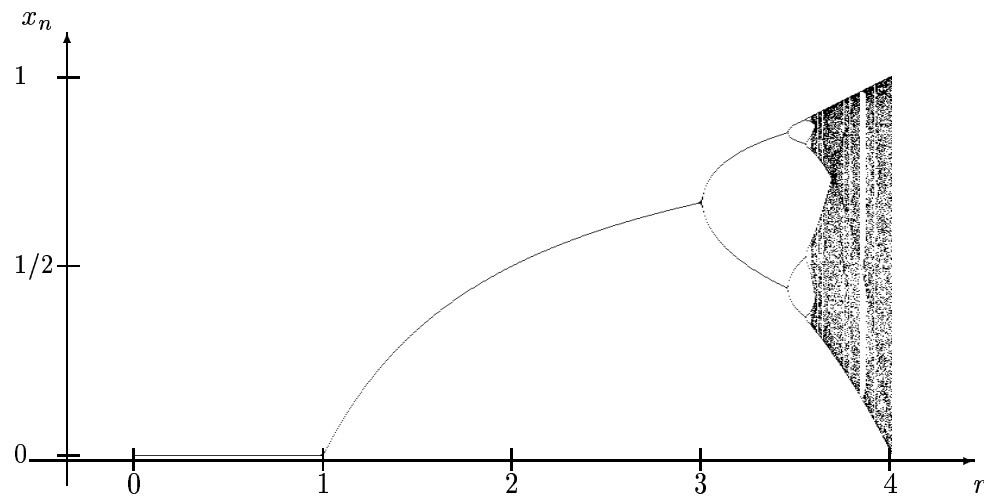
Die (monoton wachsende) Folge der Verzweigungsstellen ist beschränkt: es gilt $a_\infty := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \approx 3.5699456\dots$. Für $r > a_\infty$ verhält sich die Iterationsfolge in den meisten Fällen "chaotisch", also ohne erkennbare Regelmäßigkeit. Dies kann man beispielsweise bei den Beispielen $r = 3.6$ und $r = 3.9$ beobachten. Es treten jedoch in diesem chaotischen Bereich "Fenster der Ordnung" auf, das heißt, für bestimmte Werte von $r > a_\infty$ existieren anziehende Orbits von f_r . Beispielsweise kann man für $r = 3.83$ einen anziehenden Orbit der Periode 3 beobachten.

Kann man angeben, wie schnell die Folge der Verzweigungsstellen gegen a_∞ konvergiert? Man kann zeigen, dass

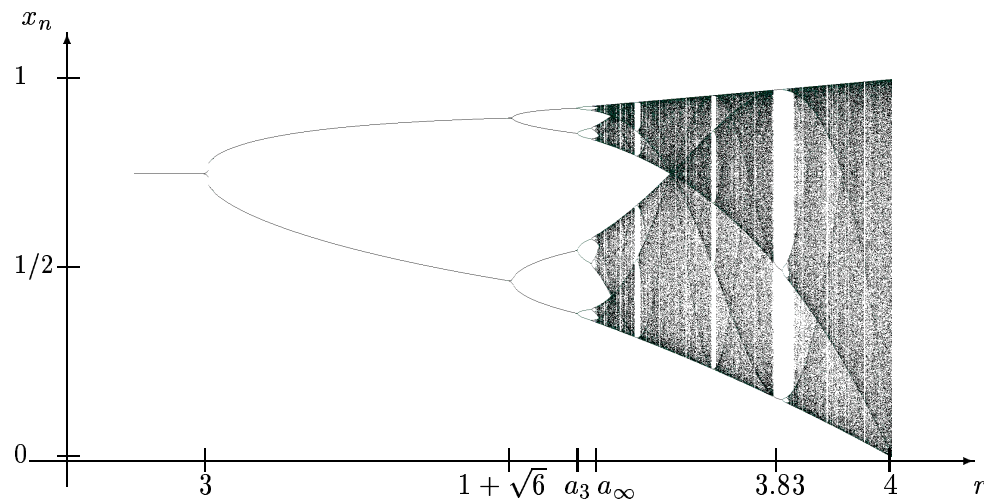
$$\delta := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+2} - a_{n+1}} \approx 4.66920\dots$$

gilt. Diese Zahl δ nennt man die *Feigenbaum-Konstante*, nach ihrem Entdecker M. FEIGENBAUM. Sie tritt immer wieder im Zusammenhang mit Verzweigungsprozessen auf, auch bei diskreten dynamischen Systemen, die aus einem völlig anderen Zusammenhang als das unsere stammen, und die durch gänzlich andere Iterationsvorschriften beschrieben werden. Man geht heute davon aus, dass es sich bei der Feigenbaum-Konstanten um eine universelle Naturkonstante handelt.

Das Verhalten der Verhulst-Iteration läßt sich auf folgende Weise in einem Diagramm darstellen: Man trägt auf der horizontalen Achse die Werte von r auf und plottet darüber die Werte der dazugehörigen Iterationsfolge (x_n) mit $x_0 = 0.5$ für $n_0 \leq n \leq n_1$, beispielsweise mit $n_0 = 100$ und $n_1 = 200$. Warum erst bei n_0 mit dem Plotten beginnen? Weil man dadurch dem System Zeit läßt, sich auf eine Gleichgewichtslage "einzupendeln". Man erhält das *Feigenbaum-Diagramm*:



Vergrößert man den “interessanten” Bereich des Feigenbaum-Diagramms $3 \leq r \leq 4$, so erhält man das folgende Bild:



2 Das Apfelmännchen

In der Arbeitsgemeinschaft wurde noch ein weiteres diskretes dynamisches System untersucht. Dieses besitzt, anders als die Verhulst-Gleichung, keinen naturwissenschaftlichen Hintergrund. Einmal entdeckt, kann man es jedoch als mathematisches, und, wie sich zeigen wird, auch künstlerisches Objekt betrachten. Es wird durch die Iterationsvorschrift

$$z_{n+1} = g_c(z_n) := z_n^2 + c \quad (\dagger)$$

definiert. Hierbei ist die Iterationsfolge (z_n) eine Folge komplexer Zahlen und der Parameter c ist ebenfalls eine komplexe Zahl.

Die komplexen Zahlen kann man sich geometrisch als die Punkte einer Ebene vorstellen, in der ein Achsenkreuz liegt. Die Punkte der x -Achse entsprechen dabei den reellen Zahlen. Mit

komplexen Zahlen kann man nach den üblichen Gesetzen rechnen, allerdings kann das Quadrat bestimmter komplexer Zahlen auch negativ sein. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet.

Wir betrachten die Menge

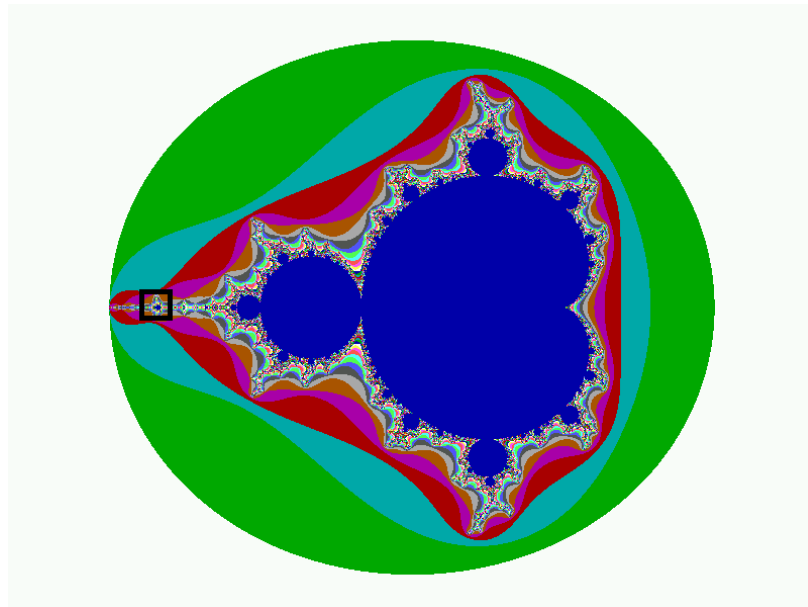
$$\mathcal{A} := \{ c \in \mathbb{C} \mid \text{Die zu } c \text{ gehörige Folge } (z_n) \text{ gemäß } (\dagger) \text{ bleibt beschränkt.} \} ,$$

diese ist bekannt unter dem Namen *Mandelbrot-Menge* (nach ihrem Entdecker B. MANDELBROT) oder *Apfelmännchen*. Der letztere Name kommt aufgrund der Gestalt von \mathcal{A} , die man in dem folgenden Bild sieht — dort sind die Punkte, die zu \mathcal{A} gehören, blau dargestellt — zustande.

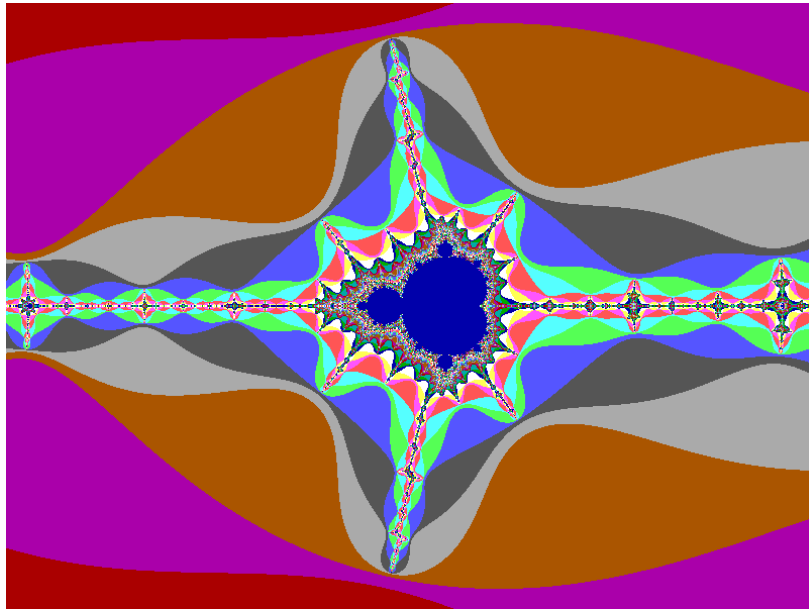
Indem man diejenigen $c \in \mathbb{C}$ bestimmt, für die g_c einen anziehenden Fixpunkt oder einen anziehenden Orbit der Periode 2 besitzt, erhält man den “Bauch” bzw. den “Kopf” des Apfelmännchens.

Weiter kann man zeigen, dass das Apfelmännchen in der Kreisscheibe mit Radius 2 um den Ursprung liegt.

Letzteres kann man verwenden, um das Apfelmännchen effizient mit dem Computer zu zeichnen. Im folgenden Bild ist die Menge \mathcal{A} , wie gesagt, das innere blaue Gebilde; die Farben derjenigen Punkte, die nicht zu \mathcal{A} gehören, kennzeichnen, wie schnell sich die zum entsprechenden Wert von c gehörende Iterationsfolge vom Apfelmännchen entfernt.



Wenn man den im obigen Bild schwarz eingerahmten Teil des Apfelmännchens vergrößert, so erhält man das folgende Bild:



Dieses Bild ähnelt stark dem gesamten Apfelmännchen. Solche “Mini-Apfelmännchen” sind auch an vielen anderen Stellen von \mathcal{A} zu finden. Dieses Verhalten, dass nämlich ein kleines Detail einer Darstellung eines dynamischen Systems bei hinreichender Vergrößerung dem gesamten System ähnelt — man spricht von *Selbstähnlichkeit* — ist für chaotische dynamische Systeme typisch.