Themenkataloge für die Zentralklausuren (Sekundarstufe II)

Algebra
Funktionentheorie
Reelle Analysis

Diese Themenkataloge sind *nur für die Zentralklausuren* maßgeblich. Für die *Individualklausuren* und die *mündlichen Prüfungen* liegt die Verantwortung in der Hand des jeweiligen Prüfers. Daher ist eine Absprache des Prüflings mit dem Prüfer über den inhaltlichen Rahmen der Prüfung in jedem Fall erforderlich. (Die folgenden Kataloge können dabei als Gesprächsgrundlage dienen.)

Für die Zentralklausur wählt der Prüfling bei der Anmeldung zur Prüfung ein Gebiet aus dem Katalog „Algebra, Reelle Analysis, Funktionentheorie“; dieses Gebiet wird in der mündlichen Prüfung nicht mehr geprüft.

Die Prüfer des Mathematischen Instituts haben für die Zentralklausuren verabredet:

1. Aufgaben zu vermeiden, die die Kenntnis spezieller Tricks voraussetzen. Die Klausuraufgaben sollen aufgrund eines grundlegenden Verständnisses und der Kenntnis der einschlägigen Methoden eines Gebietes und aufgrund einer allgemeinen mathematischen Arbeitsfähigkeit lösbar sein.

2. Aufgaben zu vermeiden, in denen die Lösung eines Teiles die notwendige Voraussetzung für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile ist.

3. die Anzahl der Aufgaben in einer Klausur nicht zu knapp zu halten, so dass die gute Bearbeitung einer gewissen Auswahl schon als eine gute Leistung bewertet werden kann. Bei der Bewertung der Klausuren ist die Anzahl der *sorgfältig* bearbeiteten Aufgaben entscheidend.

Zahlen
Zahlbereichserweiterungen: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Algebraische und Transzendente Zahlen. Transzendenz von e und π.

Gruppentheorie
Grundbegriffe: Gruppe, Untergruppe, Gruppenhomomorphismus. Nebenklassen, Index, Ordnung. Normalteiler, Faktorgruppen. Homomorphie- und Isomorphiesätze. Direkte Produkte von Gruppen. Ordnung eines Elements, kleiner Fermatscher Satz, Satz von Lagrange.

Beispiele: Zyklische Gruppen, Diedergruppen, Kleinsche Vierergruppe. Symmetrische, alternierende Gruppen, Permutationsgruppen. Lineare Gruppen $\mathrm{GL}(n, K)$, $\mathrm{SL}(n, K)$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Geometrische Deutung der zyklischen und der Diedergruppen als Symmetriegruppen von Polygonen.

Gruppenoperationen auf Mengen, Bahnen (=Orbiten), Standgruppen (=Isotropie-, Stabilisatorgruppen), Bahnengleichung. Links-, Rechts- und Konjugationsoperation einer Gruppe auf sich selbst. Innere und äußere Automorphismen.

Normalreihen, auflösbare Gruppen, Kommutatorgruppe. Auflösbarbeit von S_4 und Nichtauflösbarkeit von A_n für $n \geq 5$.

Ringtheorie
Grundbegriffe: Ideale, Homomorphismen, Restklassenringe. Homomorphie- und Isomorphiesätze. Einheitengruppe, Nullteiler, nilpotente Elemente. (Schief)körper. Primideale, maximale Ideale. Integritätsbereiche (=Integritätsringe), Hauptidealringe. Faktorielle Ringe.

Arithmetik in euklidischen Ringen (besonders $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[i]$ und $k[T]$): Primelemente, Existenz und Eindeutigkeit von Primfaktorzerlegungen. Euklidischer Algorithmus zur Bestimmung des ggT. Anwendung in $k[T]$: Partialbruchzerlegung.

Der Ring $\mathbb{Z}/n$: Rechnen mit Kongruenzen. Chinesischer Restklassensatz. Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/n)^{\times}$, Eulersche φ-Funktion. Existenz von Primitivwurzeln für $(\mathbb{Z}/p)^{\times}$.

Polynomringe: Polynomringe faktorieller Ringe sind faktoriell. Irreduzibilitätskriterien. Kreisteilungspolynome.

Konstruktion des Quotientenkörpers von Integritätsbereichen.

Körpertheorie
Grundbegriffe: Primkörper, Charakteristik, Körpererweiterungen, algebraische Elemente, transzendente Elemente. Grad, Gradsatz. Minimalpolynom, charakteristisches Polynom. Zerfällungskörper. Existenz und Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses (ohne Beweis).

Endliche Körper haben Primpotenzordnung. Existenz und Eindeutigkeit endlicher Körper vorgegebener Ordnung.

Polynome mit mehrfachen Nullstellen, separable Erweiterungen. Satz vom primitiven Element. Galoiserweiterungen, Galoisgruppe, Hauptsatz der Galoistheorie.

Anwendungen
Zyklische Erweiterungen. Quadratische, kubische Gleichungen. Kreisteilungskörper. Auflösbarkeit von Polynomgleichungen vom Grad ≤ 4 und Nichtauflösbarkeit von Polynomgleichungen vom Grad ≥ 5.

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (Kreisquadratur, Winkeldreiteilung, Würfelverdoppelung). Kreisteilungskörper für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ über $\mathbb{Q}$. Speziell: 5-te Einheitswurzeln. Explizite Konstruktion des regulären Fünfecks.

Erläuterungen und Literaturhinweise

Die nachstehenden Literaturverweise beziehen sich auf die Bücher:
[A] M. Artin: Algebra (Birkhäuser)
[B] Bosch: Algebra (Springer)
[E] Ebbinghaus et. al.: Zahlen (Springer)
[FS] Fischer/Sacher: Einführung in die Algebra (Teubner Studienbücher)
Dabei werden besonders die Bücher [A], [B], [E] zur Lektüre empfohlen.

Zahlen: Das Grundverständnis der Zahlbereichserweiterungen ist wesentlich gerade auch für den Schulunterricht. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ist die Erweiterung eines Halbrings zu einem Ring, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ die Konstruktion des Quotientenkörpers, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der analytische Prozess der Vervollständigung (=Komplettierung), $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eine endliche, separable Körpererweiterung. Die Kapitel 1-3 in [E] sind ganz diesem Thema gewidmet. Es sollte bekannt sein, was algebraische und was transzendete Zahlen sind, und wie man zeigt, dass es transzendente Zahlen in $\mathbb{R}$ gibt [FS Anhang 2]. Der einfachste Beweis geht über ein Abzählungsargument, das man in der Einleitung zum Anhang 2 von [FS] findet. Die Transzendenz von e und π wurde von Hermite bzw. Lindemann bewiesen. Die Beweise sind nicht ganz einfach und gehören nicht zur Vorlesung über Algebra. Lesenswert zu π ist auch das Kapitel [E, 5].

Gruppen: Die Gruppentheorie findet man in den einschlägigen Kapiteln von [A],[B] und [FS]. Die Abschnitte über Sylowgruppen und freie Gruppen werden ausgelassen. Dagegen sollte der folgende Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen bekannt sein: Jede endliche abelsche Gruppe ist direktes Produkt von zyklischen Untergruppen. Der Beweis ist etwas mühsam. Er wird nicht vorausgesetzt.

Eine der wichtigsten Ideen der Gruppentheorie ist die, dass Gruppen auf Mengen operieren können und dass man aus dieser Operation Rückschlüsse über die Gruppe selbst wie auf die Menge ziehen kann. Diese Idee wird beispielsweise zu einem scharfen Werkzeug, wenn man die Gruppe auf sich operieren lässt. Dieser zentrale Gedanke und seine geometrische Deutung kommt in den Büchern von [FS] und [B] leider viel zu kurz. Die beste Darstellung findet sich in [A Kapitel 5].

Die folgenden Beispiele sollten gut bekannt sein: Die zyklischen und die Diedergruppen und ihre Deutung als Symmetriegruppen von regulären n-Ecken. Die symmetrischen und die alternierenden Gruppen. Schon aus der linearen Algebra bekannt sind die linearen Gruppen $\mathrm{GL}(n, K)$, $\mathrm{SL}(n, K)$, $O(n, \mathbb{R})$, $U(n)$.

Die Auflösbarkeit bzw. Nichtauflösbarkeit der symmetrischen Gruppen S_n für $n \leq 4$ bzw. $n \geq 5$ bilden den gruppentheoretischen Unterbau für die Auflösbarkeit bzw. Nichtauflösbarkeit von polynomialen Gleichungen vom Grad ≤ 4 bzw. ≥ 5.

Ringe: Besonders wichtig sind der Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen $\mathbb{Z}[i]$ und der Polynomring $K[T]$ über einem Körper K. Ihnen gemeinsam ist, dass es sich um euklidische Ringe handelt. Die folgenden Begriffe und Themen sind von unmittelbarer Relevanz auch für die Schule und müssen gut beherrscht werden: Der euklidischer Algorithmus, Berechnung von ggT und kgV, Primfaktorzerlegungen, Partialbruchzerlegung. In gleicher Weise die elementare Arithmetik in $\mathbb{Z}$, lineare Kongruenzen und ihre Lösung, Chinesischer Restklassensatz. Kriterien für die Irreduzibilität von Polynomen sind wichtig für die Anwendungen in der Körpertheorie. Die Kreisteilungspolynome sind die irreduziblen Faktoren von $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Sie tragen ihren Namen wegen des Zusammenhangs mit dem Problem, den Kreis in n gleiche Teile zu zerschneiden, oder anders gesagt: ein reguläres n-Eck zu konstruieren. Aus jedem Integritätsbereich bekommt man durch Hinzufügen von Nennern einen Körper, den Quotientenkörper. Die wichtigsten Beispiele hierzu sind wieder die Erweiterungen $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ und $k[T] \subset k(T)$. Wichtig ist dabei vor allem auch das theoretische Konzept der sauberen Konstruktion von Brüchen als Äquivalenzklassen von Paaren nach einer gewissen Äquivalenzrelation. Diese Aspekte der Ringtheorie findet man in jedem der genannten Algebralehrbücher.

Körper: Neben den allgemeinen Konzepten sollte eine besondere Vertrautheit mit den folgenden Beispielen da sein: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[i]$, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $K(X)$, $\mathbb{F}_p$. Es muss klar sein, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist. Der Beweis dafür wird gewöhnlich in der Analysis oder in der Funktionentheorie geführt und wird deshalb hier nicht erwartet. Auch für die Existenz und Eindeutigkeit des algebraischen Abschlusses eines beliebigen Körpers genügt die genaue Kenntnis dieser Aussage und ihre Anwendung, der Beweis ist weniger relevant. Über endliche Körper muss bekannt sein, dass ihre Mächtigkeit eine Primpotenz ist und warum, und dass es zu jeder Primpotenz bis auf Isomorphie genau einen Körper mit dieser Mächtigkeit gibt und warum.

In der Diskussion separabler Polynome bzw. separabler Körpererweiterungen sollte bekannt sein, was Separabilität bedeutet und wann Inseparabilität auftreten bzw. nicht auftreten kann. Wir beschränken uns danach auf separable Körpererweiterungen.

Der Höhepunkt der Algebravorlesung ist der Hauptsatz der Galoistheorie, der eine Brücke von der Körpertheorie zur Gruppentheorie schlägt. Wichtig sind wieder die Anwendungen der Galoistheorie auf klassische algebraische und geometrische Fragestellungen: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, (Nicht)auflösbarkeit von algebraischen Gleichungen. Es empfiehlt sich, durch Durchrechnen einfacher Beispiele eine gute Vertrautheit mit den Zerfällungskörpern quadratischer und kubischer Gleichungen zu erwerben.

Funktionentheorie

Komplexe Zahlen, insbesondere: Polarkoordinatendarstellung, n-te Wurzeln

Die Topologie der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$

Spezielle Funktionen, insbesondere: Exponentialfunktion, sin, cos, tan, sinh, cosh, Logarithmus, arctan; Beziehungen zwischen diesen Funktionen; Möbiustransformationen (= lineare Transformationen)

Holomorphe Funktionen: komplexe Differenzierbarkeit, Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen, Winkeltreue, konforme Abbildungen

Kurvenintegrale, Vertauschung von Limesbildung und Integration, stetige Abhängigkeit eines Kurvenintegrals von einem komplexen Parameter, Stammfunktionen, Umlaufzahl (= Windungszahl = Index) geschlossener Kurven

Cauchyscher Integralsatz und Cauchysche Integralformel (in sternförmigen Gebieten), die Cauchysche Integralformel für Ableitungen (für kreisförmige Integrationswege in sternförmigen Gebieten) mit Anwendungen; insbesondere : Satz von Liouville, sog. Fundamentalsatz der Algebra, Existenz einer Stammfunktion, eines Logarithmus und einer n-ten Wurzel einer holomorphen Funktion (unter geeigneten Voraussetzungen)

Weierstraßscher Approximationssatz, Satz von Morera, Riemannscher Hebbarkeitssatz

Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen in Potenzreihen mit Anwendungen; insbesondere: Identitätssatz, holomorphe Fortsetzbarkeit reell-analytischer Funktionen, Elementares über die Verteilung der Nullstellen holomorpher Funktionen, Verhalten einer holomorphen Funktion in der Nähe einer mehrfachen w-Stelle

Gebietstreue holomorpher Funktionen, Maximumprinzip

Entwickelbarkeit holomorpher Funktionen in Laurentreihen, die verschiedenen Typen isolierter Singularitäten, Satz von Casorati-Weierstraß, meromorphe Funktionen, Residuensatz, Formeln zur Berechnung von Residuen, Anwendungen des Residuensatzes auf die reelle Analysis (mindestens: $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cdot e^{ix}\,\mathrm{d}x$ mit geeigneten Voraussetzungen), das Null- und Polstellen-zählende Integral, Satz von Rouché

Ganze Funktionen, ganze transzendente Funktionen, Verhalten dieser Funktionen in der Nähe von ∞

Literaturvorschläge: FISCHER/LIEB: *Funktionentheorie*; FREITAG/BUSAM: *Funktionentheorie*

Reelle Analysis

Elementare Topologie metrischer Räume (insbesondere des $\mathbb{R}^n$); insbesondere: offene, abgeschlossene, (folgen-)kompakte und (weg-)zusammenhängende Teilmengen, innere Punkte, Berührungspunkte, Konvergenz, Stetigkeit

Differentialrechnung in mehreren Variablen:

- Definition der Differenzierbarkeit, Darstellungen des Differentials
- Ein Ersatz für den Mittelwertsatz in mehreren Dimensionen
- Notwendige und hinreichende Kriterien für Stellen lokaler Extrema
- Lokaler Umkehrsatz
- Satz über implizit definierte Funktionen
- Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$
- Lokale Extrema unter Nebenbedingungen

Kurvenintegrale (Wegunabhängigkeit), notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz von Potentialen zu Vekorfeldern (bzw. zu Pfaffschen Formen)

Das Lebesguesche Integral (im $\mathbb{R}^n$):

- Integration durch Iteration (Satz von FUBINI), CAVALIERIsches Prinzip
- Grenzwertsätze der Integralrechnung (mindestens einer über Vertauschung von Integration und Limesbildung)
- Stetigkeit und Differenzierbarkeit eines Integrals nach einem Parameter
- Integrale stetiger Funktionen über nicht kompakten Intervallen
- Transformationssatz

Sog. Vektoranalysis:

- Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator
- Flächenintegrale (mindestens für 2-dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$)
- STOKESscher und GAUSSscher Integralsatz (im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$)