

**HARMONISCHE MAASSFORMEN UND MODULFORMEN ([1], S. 90–92,
[2], S. 90–92, [3], S. 30–31)**

Im vorangegangenen Vortrag hatten wir harmonische (schwache) Maassformen eingeführt. In diesem Vortrag sollen Sie gewisse Differentialoperatoren ξ_{2-k} untersuchen, die den Raum der harmonischen Maassformen vom Gewicht $2-k$ in den Raum der Spitzenformen vom Gewicht k abbilden. Es sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Wir definieren ($\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$)

$$\xi_{2-k} = 2iy^{2-k} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}}.$$

Wir hatten bereits gesehen, dass eine harmonische Maassform \mathcal{M} vom Gewicht $2-k$ eine Fourierreihe der Form ($q = e^{2\pi i\tau}$)

$$\mathcal{M}(\tau) = \sum_{n \geq n_0} c_f^+(n) q^n + \sum_{n < 0} c_f^-(n) \Gamma(k-1; 4\pi|n|y) q^n$$

hat. Hierin ist ($y > 0$, $s \in \mathbb{C}$)

$$\Gamma(s; y) = \int_y^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

die unvollständige Gammafunktion. Zeigen Sie, dass ξ_{2-k} eine Maassform \mathcal{M} vom Gewicht $2-k$ auf die holomorphe Funktion

$$(1) \quad \xi_{2-k}(\mathcal{M}(\tau)) = -(4\pi)^{k-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{c_f^-(n)} n^{k-1} q^n$$

abbildet. Modifizieren Sie nun die Rechnung auf S. 90–92 in [1], um zu zeigen ($\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$):

$$\xi_{2-k}(\mathcal{M}|_{2-k}\gamma) = \xi_{2-k}(\mathcal{M})|_k\gamma.$$

Schließen Sie hieraus:

Lemma 1 (Lemma 7.4 in [3]). *Der Operator ξ_{2-k} bildet den Raum der Maassformen vom Gewicht $2-k$ in den Raum der Spitzenformen vom Gewicht k ab.*

Eine harmonische Maassform, deren nicht-holomorpher Anteil verschwindet, nennen wir *schwach holomorphe Modulform*. Aus (1) folgt, dass die nicht-holomorphen Anteile zweier harmonischer Maassformen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 , für die $\xi_{2-k}(\mathcal{M}_1) = \xi_{2-k}(\mathcal{M}_2)$ gilt, übereinstimmen. Es folgt:

Satz 2. *Es seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 harmonische Maassformen vom Gewicht $2-k$ mit*

$$\xi_{2-k}(\mathcal{M}_1) = \xi_{2-k}(\mathcal{M}_2).$$

Dann ist $\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$ eine schwach holomorphe Modulform vom Gewicht $2-k$.

Tragen Sie schließlich folgendes Beispiel vor. Es sei $H(n)$ die sog. *Hurwitzsche Klassenzahl* (s. S. 8, 73 in [4], Sie brauchen in Ihrem Vortrag nicht auf die Hurwitzsche Klassenzahl einzugehen). Für $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$, $n > 0$ ist dies im Wesentlichen die Anzahl der Äquivalenzklassen binärer quadratischer Formen

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

mit Diskriminante $b^2 - 4ac = n$. Hirzebruch und Zagier [2] zeigten, dass die erzeugende Funktion

$$G(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} H(n) e^{2\pi i n \tau} + \frac{1}{8\pi\sqrt{y}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n \Gamma\left(-\frac{1}{2}; 4\pi n^2 y\right) q^{-n^2}$$

eine harmonische Maassform vom Gewicht $\frac{3}{2}$ ist. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$c \xi_{\frac{3}{2}}(G(\tau)) = \Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}$$

gilt. Die Funktion Θ ist eine der unären Thetareihen vom Gewicht $\frac{1}{2}$, die wir im zweiten Vortrag eingeführt hatten.

LITERATUR

- [1] D. Goldfeld, J. Hundley, *Automorphic representations and L -functions for the general linear group*, Cambridge studies in advanced mathematics **129**, 2011, 1–550.
- [2] F. Hirzebruch, D. Zagier, *Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms with Nebentypus*, Invent. Math. **36**, 1976, 57–113.
- [3] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory*, in Proceedings of the 2008 Harvard-MIT current developments in mathematics conference, International Press, Somerville, MA, 2009, 374–454.
- [4] Zagier, D., *Elliptic modular forms* in Bruinier, J.H., van der Geer, G., Harder, G., Zagier, D., *The 1-2-3 of Modular Forms*, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 1–104.