POINCARÉSCHE REIHEN ([1], S. 600–602, [2], S. 27–28, [3], S. 39–41, 47–51, [4], S. 54–55, [5], S. 337–340)

In diesem Vortrag sollen Sie eine Familie von Maassformen vom Gewicht $2-k \in \mathbb{Z}$ konstruieren. Die Grundidee ist dabei, eine Funktion $\varphi \in \operatorname{Kern}(\Delta_{2-k})$ zu wählen und dann eine Art Durchschnitt von $\varphi|_{2-k}\gamma$ ($\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) zu bilden. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Konvergenz der so erhaltenen Reihe, wird diese dann nach Konstruktion das modulare Transformationsgesetz erfüllen und im Kern von Δ_{2-k} liegen. Wir beschreiben dies nun genauer.

Es sei $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die invariant unter $\tau \to \tau + 1$ ist. Wir definieren $\left(\tau \in \mathbb{H} = \left\{\tau \in \mathbb{C} \middle| \operatorname{Im}(\tau) > 0\right\}\right)$

$$P_{\varphi,2-k}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \varphi\Big|_{2-k}\gamma(\tau). \tag{1}$$

Hierin ist

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Summe läuft über ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von Γ_∞ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Wir nehmen an, dass die Summe (1) absolut konvergent ist. Zeigen Sie, dass dann $P_{\varphi,2-k}$ wohldefiniert ist und dem modularen Transformationsgesetz vom Gewicht $2-k$ gehorcht (s. S. 47–51 in [3]).

Wir setzen nun ($m \in \mathbb{N}$, $\tau = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $y > 0$)

$$\psi_m(y) = (4\pi|m|y)^{\frac{k}{2}-1} M_{\left(1-\frac{k}{2}\right)\operatorname{sgn}(m), \frac{k-1}{2}}(4\pi|m|y),$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_m(\tau) = \psi_m(y) e^{2\pi i m x}.$$

Hierin ist $M_{\nu,\mu}(y)$ eine Lösung der *Whittakerschen Differentialgleichung* ([5], S. 337–340)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right) u = 0,$$

die für $y \to 0$ folgende asymptotische Wachstumsbedingung erfüllt:

$$M_{\nu,\mu}(|y|) = O\left(|y|^{\operatorname{Re}\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}\right).$$

Zeigen Sie wie in [2], ohne aber (1.29), (1.30) und (1.31) nochmals zu beweisen: ($q = e^{2\pi i \tau}$):

$$\varphi_m(\tau) = (k-1)\left(\Gamma(k-1) - \Gamma(k-1; 4\pi m y)\right) q^{-m}. \tag{2}$$

Hierin ist $\Gamma(s; y)$ die unvollständige Gammafunktion ($y > 0,\ s \in \mathbb{C}$)

$$\Gamma(s; y) = \int_y^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

und $\Gamma(s)$ die gewöhnliche Gammafunktion. Verwenden Sie die Darstellung (2) von φ_m und zeigen Sie $\Delta_{2-k}(\varphi_m) \equiv 0$. Beweisen Sie dann, dass für eine beliebige reel analytische Funktion f gilt: ($\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

$$\Delta_{2-k}(f)\Big|_{2-k}\gamma = \Delta_{2-k}\left(f\Big|_{2-k}\gamma\right).$$

Man kann hieraus zeigen, dass mit φ_m auch $P_{\varphi_m,2-k}$ im Kern von Δ_{2-k} liegt, falls die Reihe (1) lokal gleichmäßig konvergiert.

Zeigen Sie schließlich, dass für unsere Wahl der φ_m die Reihe (1) absolut und lokal gleichmässig konvergiert, falls $2-k<\frac{1}{2}$ (oder äquivalent $k>\frac{3}{2}$) gilt. Sie können hierzu Proposition 2.9 aus [3] ohne Beweis benutzen. Es folgt:

Satz 1. *Es sei $\frac{3}{2}>k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Dann ist die Poincarésche Reihe $P_{\varphi_m,2-k}$ eine Maassform vom Gewicht $2-k$.*

Literatur

[1] K. Bringmann, K. Ono, *Arithmetic properties of coefficients of half-integral weight Maass–Poincaré series*, Math. Ann. **337** (2007) 591–621.

[2] J. Bruinier, *Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors,* Springer Lect. Notes Math. **1780** Springer-Verlag, 2002, Berlin.

[3] H. Iwaniec, Topics in classical automorphic forms, Graduate studies in Mathematics **17**, American Mathematical Society, 1997, 1–261.

[4] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory,* in Proceedings of the 2008 Harvard-MIT current developments in mathematics conference, International Press, Somerville, MA, 2009, 374–454.

[5] E. Whittaker, G. Watson, A course in modern analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.