HARMONISCHE MAASSFORMEN UND DIE BOL-IDENTITÄT ([3], S. 30–31, [1], S. 90–92)

Wir wählen ein $k \in \mathbb{N}$. Im siebten Vortrag betrachteten wir den Differentialoperator ξ_{2-k}, der den Raum der harmonischen Maassformen vom Gewicht $2-k$ in den Raum der Spitzenformen vom Gewicht k abbildet. Eine *schwach holomorphe Modulform* ist eine harmonische Maassform, deren nicht-holomorpher Anteil verschwindet. In Ihrem Vortrag sollen Sie einen weiteren Differentialoperator D^{k-1} auf dem Raum der harmonischen Maassformen vom Gewicht $2-k$ einführen, der aber in den Raum der schwach holomorphen Modulformen abbildet. Wir definieren die Operatoren ($\tau = x + iy \in \mathbb{H},\ x, y \in \mathbb{R},\ y > 0$):

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau},\\
R_{2-k} &= 2i\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{2-k}{y} = -4\pi D + \frac{2-k}{y},\\
R_{2-k}^n &= R_{2n-k} \circ \cdots \circ R_{4-k}R_{2-k}.
\end{aligned}
$$

Der Operator R_{2-k} ist ein sogenannter *Maass-Differentialoperator*. Zeigen Sie nun (s. [1], S. 90–92), dass für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$
(R_{2-k}(f))\Big|_{4-k}\gamma = R_{2-k}\left(f\Big|_{2-k}\gamma\right),
$$

d.h. R_{2-k} bildet Funktionen, die dem modularen Transformationsgesetz vom Gewicht $2-k$ gehorchen, in den Raum der Funktionen ab, die das Transformationsgesetz vom Gewicht $4-k$ erfüllen. Beweisen Sie nun Lemma 7.7 aus [3]:

Lemma 1 (Bol-Identität)**.** *Es gilt*

$$
D^{k-1} = \frac{1}{(-4\pi)^{k-1}} R_{2-k}^{k-1}.
$$

Zeigen Sie hierzu zunächst per Induktion (s. [2], S. 249–250)

$$
R_{2-k}^n = (-4\pi)^n \sum_{0\le m\le n} \frac{n!}{(n-m)!}\binom{n-k}{m}\left(-\frac{1}{4\pi y}\right)^m D^{n-m}.
$$

Benutzen Sie schließlich Lemma 1, um folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2 (Theorem 7.6 of [3])**.** *Der Operator D^{k-1} bildet den Raum der harmonischen schwachen Maassformen vom Gewicht $2-k$ in den Raum der schwach holomorphen Modulformen vom Gewicht k ab.*

Literatur

[1] D. Goldfeld, J. Hundley, Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Cambridge studies in advanced mathematics **129**, 2011, 1–550.

[2] J. Lewis, D. Zagier, *Period functions for Maass wave forms, I*, Ann. of Math. **153** (2001) 191–258.

[3] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory,* in Proceedings of the 2008 Harvard-MIT current developments in mathematics conference, International Press, Somerville, MA, 2009, 374–454.