MODULFORMEN ([1] S. 37–41, 109–111, 149–164)

Dieser Vortrag soll die Grundlagen aus der Theorie der Modulformen einführen. Zunächst sollen Modulformen von ganzzahligem Gewicht k definiert werden. Führen Sie dazu die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$, die Operation von Möbiustransformationen und den Strichoperator $|_k$ ein.

Erklären Sie, warum für den Strichoperator gilt:

$$(f|_k M_1)\,|_k M_2 = f|_k\,(M_1 M_2)\,.$$

Hierin seien $M_1,\ M_2 \in \mathrm{SL}_2\,(\mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\}$. Erklären Sie als nächstes, dass es außer der Nullfunktion keine Modulformen von ungeradem Gewicht gibt. Definieren Sie dann meromorphe Modulformen und erinnern Sie dabei auch an die Definition von Laurent- und Fourier-Reihen. Erläutern Sie die Bedingungen für holomorphe Modulformen und Spitzenformen. Zeigen Sie, dass es keine nicht-konstanten (holomorphen) Modulformen Gewicht ≤ 0 gibt.

Unser nächstes Ziel ist es, als Beispiele von Modulformen, Eisenstein-Reihen und die Diskriminante einzuführen. Eisenstein-Reihen spielen eine besondere Rolle, da sie den Ring der Modulformen erzeugen und ferner zu elliptischen Kurven in Beziehung stehen. Definieren Sie die Eisenstein-Reihe G_k für $k > 2$ und zeigen Sie, dass diese eine Modulform vom Gewicht k ist. Auch die Diskriminante Δ spielt eine große Rolle, u. A. wegen ihrer Beziehung zu elliptischen Kurven und Gittern (d.h. $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{C}$ für feste $\tau, \omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \notin \mathbb{R}\tau$). Zeigen Sie, dass Δ eine Spitzenform ist.

Literatur

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.