SCHRANKEN FÜR SPITZENFORMEN UND EISENSTEIN-REIHEN ([1] S. 15–17, 23)

Im vorangegangenen Vortrag haben wir gesehen, dass eine Modulform f die Transformation $f(\tau+1) = f(\tau)$ erfüllt. Daher besitzt f eine Fourier-Reihe

$$f(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n \tau}$$

für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$. Die Fourier-Koeffizienten $a(n)$ tragen häufig arithmetisch oder kombinatorisch interessante Informationen. Wir betrachten zunächst die Fourier-Koeffizienten von den Eisenstein-Reihen aus dem vorangeganenen Vortrag.

Satz 2.1. *Die Fourier-Reihe der Eisenstein-Reihe G_k ($k > 2$ gerade) ist durch*

$$G_k(\tau) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\geq 1} \sigma_{k-1}(n)\, e^{2\pi i n \tau}$$

gegeben, wobei B_k die k-te Bernoulli-Zahl ist und $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

In diesem Seminar untersuchen wir das asymptotische Wachstum der Fourier-Koeffizienten von verschiedenen Typen von Modulformen. Das asymptotische Verhalten der Fourier-Koeffizienten von Eisenstein-Reihen erhalten wir aus Satz 2.1.

Folgerung 2.2. *Es seien $a(n)$ die Fourier-Koeffizienten von G_k, d.h. $G_k(\tau) = \sum_{n\geq 0} a(n)\, e^{2\pi i n \tau}$. Dann gilt für $n \to \infty$*

$$a(n) \;\sim\; n^{k-1}.$$

Zeigen Sie, dass die Fourier-Koeffizienten von Spitzenformen langsamer wachsen:

Satz 2.3. *Es sei $k > 2$ gerade und $\sum_{n\geq 1} a(n) e^{2\pi i n \tau}$ die Fourier-Reihe von $f \in S_k$. Dann gibt es eine Konstante C, die nur von f abhängt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $|a(n)| \leq C n^{\frac{k}{2}}$ gilt.*

Später wenden wir diese Ergebnisse auf die Theorie der quadratischen Formen an.

Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008