POINCARÉ-REIHEN UND KOEFFIZIENTEN VON MODULFORMEN ([1] S. 2–8, [2] S. 107–110, 126, 159)

In diesem Vortrag sollen Sie die Koeffizienten von Modulformen mit Hilfe von verallgemeinerten Eisenstein-Reihen, sogenannten Poincaré-Reihen, untersuchen. Wir definieren die Untergruppe

$$\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| \ell \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

der Translationen. Die Funktion $\varphi_n(\tau) = e^{2\pi i n\tau}$ ($n \in \mathbb{N}_0$) ist invariant unter Translationen (d.h. es gilt $\varphi_n(\tau+1) = \varphi_n(\tau)$). Wir definieren nun formal die *zu φ_n gehörige Poincaré-Reihe vom Gewicht k* durch

$$P_{k,n}(\tau) = \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \varphi_n\Big|_k M(\tau).$$

Hier bei bedeutet $M \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, dass M ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ nach Γ_∞ durchläuft, d.h. man muss sich insbesondere klarmachen, dass die Poincaré-Reihen auch wohldefiniert sind, sprich unabhängig von der Wahl dieses Vertretersystems. Für $n = 0$ erhalten wir bis auf Multiplikation mit einer Konstanten die Eisenstein-Reihe G_k. Zeigen Sie zunächst, dass die Poincaré-Reihe $P_{k,n}$ eine Modulform vom Gewicht k ist.

Satz 3.1. *Für $k \geq 3$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $P_{k,n} \in M_k$. Darüber hinaus ist $P_{k,n}$ für $n > 0$ eine Spitzenform.*

Formal (d.h. wenn wir die absolute Konvergenz der Reihe annehmen) folgt aus der Identität ($M_1, M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$)

$$\left(\varphi_n\Big|_k M_1\right)\Big|_k M_2 = \varphi_n\Big|_k (M_1 M_2),$$

die im ersten Vortrag bewiesen wurde, dass $P_{k,n}$ das modulare Transformationsgesetz erfüllt. Zeigen Sie also, um Satz 3.1 zu beweisen, dass für $k \geq 3$ die Reihen $P_{k,n}$ absolut konvergieren. Aus $\mathrm{Im}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) > 0$ folgt

$$\left| e^{2\pi i n\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)} \right| \leq 1. \tag{1}$$

Benutzen Sie diese Schranke, um analog zu dem Beweis des Lemmas über die Konvergenz von Eisenstein-Reihen in Kapitel III.2.1 in [2] zu zeigen, dass die Poincaré-Reihen absolut und lokal-gleichmäßig (man sagt statt lokal-gleichmäßig auch *kompakt*) konvergieren. Zeigen Sie schließlich, dass $P_{k,n}$ für $n > 0$ eine Spitzenform ist, indem Sie die die Terme für $\mathrm{Im}(\tau) > v_0$ (mit $v_0 > 0$ fest) gleichmäßig abschätzen und dann termweise den Grenzwert für $\tau \to i\infty$ ermitteln.

Die Poincaré-Reihen stehen durch das sogenannte *Petersson-Skalarprodukt* im Zusammenhang mit den Fourier-Koeffizienten von Modulformen. Um dieses Skalarprodukt zu definieren, sollen Sie zunächst den *exakten Fundamentalbereich*

$$\mathcal{F} = \left\{ \tau = x+iy \in \mathbb{H} \Big| -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2},\ |\tau| \geq 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < x < 0 \right\}$$

der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-Operation auf $\mathbb{H}$ einführen (s. S. 126 in [2]). Definieren Sie dann das *Petersson-Skalarprodukt* von Modulformen f und g vom Gewicht k, von denen eine Spitzenform ist, als

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k \frac{dxdy}{y^2}.$$

Die Bedeutung der Poincaré-Reihen im Zusammenhang mit dem Petersson-Skalarprodukt zeigt der folgende Satz, den Sie in Ihrem Vortrag beweisen sollen.

Satz 3.2 (Peterssonsche Koeffizienten-Formel)**.** *Es sei* $f(\tau) = \sum_{m\geq 1} a(m)e^{2\pi i m\tau}$ *eine Spitzenform vom Gewicht* k*. Dann gilt*

$$\langle f, P_{k,n}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0,\\ \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}}a(n) & \text{für } n \geq 1.\end{cases}$$

Insbesondere ist die Eisenstein-Reihe vom Gewicht k *bzgl. des Petersson-Skalarproduktes orthogonal zum Raum der Spitzenformen vom Gewicht* k*.*

Literatur

[1] K. Bringmann, *Asymptotic formulas for modular forms and related functions*, 2013.
[2] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.