EINE BASIS FÜR DEN RAUM DER SPITZENFORMEN ([1] S. 9–10, [2] S. 126, 168–172)

In diesem Vortrag sollen Sie eine Basis für den Raum der Spitzenformen S_k vom Gewicht k für gerades $k \geq 4$ konstruieren.

Wir betrachten eine Spitzenform

$$f(\tau) = \sum_{m \geq 1} a(m) e^{2\pi i m \tau} \in S_k,$$

die orthogonal zu allen Poincaré-Reihen ist. Nach der Peterssonschen Koeffizienten-Formel (aus dem letztem Vortrag) gilt für jedes $n \geq 1$ die Gleichung

$$a(n) = \frac{(4\pi n)^{k-1}}{(k-2)!} \langle f, P_{k,n} \rangle = 0.$$

Somit ist f identisch gleich 0. Wir erhalten, dass die Poincaré-Reihen $P_{k,n}$ mit $n \geq 1$ den Raum S_k erzeugen. In Ihrem Vortrag sollen Sie nun hieraus explizit eine Teilmenge bestimmen, die eine Basis bildet.

Satz 4.1. *Es sei $k \geq 4$ gerade und d_k bezeichne die Dimension von S_k, dann bildet die Menge*

$$\{P_{k,1}, \ldots, P_{k,d_k}\}$$

eine Basis von S_k.

Um Satz 4.1 zu beweisen, müssen wir zunächst die Dimension d_k von S_k bestimmen.

Satz 4.2. *Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ gerade. Dann gilt*

$$\dim M_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \end{cases}$$

$$\dim S_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor & \text{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12}, \\ \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor - 1 & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12},\ k \geq 14, \\ 0 & \text{falls } k = 2. \end{cases}$$

Sie sollen in Ihrem Vortrag Satz 4.2 formulieren, aber nur eine obere Schranke für $\dim M_k$ beweisen. Der wichtigste Schritt ist es hierbei zu zeigen, dass eine Spitzenform vom Gewicht k bereits dann identisch verschwindet, wenn die ersten $\left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor$ Fourier-Koeffizienten verschwinden. Dies folgt aus der sogenannten $\frac{k}{12}$-Formel, die Sie beweisen sollen. Sei hierzu

$$\mathrm{ord}_w = \begin{cases} 2 & \text{falls } w = i, \\ 3 & \text{falls } w = \rho = e^{\frac{\pi i}{3}}, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und sei $\mathrm{ord}_w(f)$ die Ordnung von f im Punkt w (d.h. für $\mathrm{ord}_w(f) > 0$ ist $\mathrm{ord}_w(f)$ die Ordnung der Nullstelle von f im Punkt w und für $\mathrm{ord}_w(f) < 0$ ist $-\mathrm{ord}_w(f)$ die Ordnung des Pols von f im Punkt w).

Satz 4.3. *Für eine Modulform f vom Gewicht k gilt*

$$\sum_{w \in \mathcal{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord} w} \operatorname{ord}_w(f) = \frac{k}{12}.$$

Hierin sei $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} \cup \{\infty\}$.

Der Beweis der $\frac{k}{12}$-Formel verwendet den Residuensatz. Geben Sie diesen an und schreiben Sie dann die linke Seite der Formel als ein Integral. Die Berechnung dieses Integrals liefert dann die rechte Seite der Identität. Erklären Sie die grundliegende Idee des Beweises, ohne die Rechnungen im Detail wiederzugeben. Wiederholen Sie die hierzu benötigten Resultate aus der Funktionentheorie.

Beweisen Sie schließlich Satz 4.1 unter der Annahme, dass d_k wie in Satz 4.2 gegeben ist.

Literatur

[1] K. Bringmann, *Asymptotic formulas for modular forms and related functions*, 2013.
[2] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.