# DIE FOURIER-ENTWICKLUNGEN VON POINCARÉ-REIHEN ([1] S. 185, [2] S. 10–11)

Im vorangegangenen Vortrag hatten wir gesehen, dass die Poincaré-Reihen den Raum der Spitzenformen aufspannen. Darüber hinaus hatten wir gezeigt, dass die Reihen $P_{k,1}, \ldots, P_{k,\dim(S_k)}$ eine Basis von $S_k$ bilden. In Ihrem Vortrag sollen Sie explizit die Fourier-Koeffizienten der Poincaré-Reihen

$$P_{k,n}(\tau) = \sum_{m \geq 1} a_n(m) e^{2\pi i m \tau}$$

berechnen. Hierzu definieren wir die *Kloosterman-Summe*

$$K_c(m,n) = \sum_{\substack{x \pmod c \\ \mathrm{ggT}(x,c)=1}} e^{2\pi i \frac{mx + n\bar{x}}{c}},$$

wobei $\bar{x}$ das mulitplikative Inverse von $x \pmod c$ ist. Desweiteren benötigen wir die *$J$-Bessel-Funktion der Ordnung $r \in \mathbb{N}$,*

$$J_r(x) = \sum_{\ell \geq 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\,(\ell + r)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+2\ell}.$$

Beweisen Sie nun folgenden Satz.

**Satz 5.1.** *Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$a_n(m) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \left(\delta_{m,n} + 2\pi i^{-k} \sum_{c \geq 1} \frac{K_c\,(m,n)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right).$$

*Hierbei bezeichnet*

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

*das Kronecker-$\delta$.*

Zum Beweis von Satz 5.1 drücken wir $P_{k,n}$ durch Summen der Form

$$\mathcal{G}(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi i n}{c^2(\tau+m)}} (\tau + m)^{-k}$$

aus und wenden dann die Poissonsche Summenformel an. Diese Formel besagt (Konvergenz vorausgesetzt), dass für eine Funktion $f$ und ihre Fourier-Transformation

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{2\pi i x t} dt$$

die Gleichung

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m)$$

erfüllt ist.

Nach Anwendung der Poissonschen Summenformel erhalten wir eine Integraldarstellung der Fourier-Koeffizienten $a_n(m)$. Schließen Sie nun den Beweis von Satz 5.1 ab, indem Sie ohne Beweis die folgende Darstellung der $J$-Bessel Funktion benutzen ($x > 0$, $\mathrm{Re}(\mu) > -1$, $\kappa > 0$):

$$\left(\frac{x}{\kappa}\right)^{\frac{\mu-1}{2}} J_\mu\left(2\sqrt{\kappa x}\right) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{C-iT}^{C+iT} t^{-\mu} e^{xt-\frac{\kappa}{t}} dt$$

für jedes genügend große $C \in \mathbb{R}$.

## Literatur

[1] H. Bateman, A. Erdelyi, *Tables of integral transforms*, Volume 1, Mcgraw-Hill, New York, 1954.
[2] K. Bringmann, *Asymptotic formulas for modular forms and related functions*, 2013.