DAS WACHSTUM VON PARTITIONEN ([1] S. 1–5, [2] S. 18–21)

In den nächsten beiden Vorträgen werden wir die Fourier-Koeffizienten von *schwach holomorphen* Modulformen, d.h. von Modulformen, die zwar holomorph auf $\mathbb{H}$ sind, aber an den Spitzen Polstellen haben können, untersuchen. Die Fourier-Koeffizienten solcher Formen, die häufig interessante kombinatorische Informationen tragen, wachsen erheblich schneller als jene von holomorphen Formen. In diesem Vortrag sollen Sie ein Beispiel einer solchen Form betrachten.

Eine *Partition* einer positiven ganzen Zahl n ist eine monoton wachsende Folge positiver ganzer Zahlen, deren Summe n ist. Wir bezeichnen mit $p(n)$ die Anzahl solcher Partitionen von n. Beweisen Sie die folgende Identität, die auf Euler zurückgeht.

$$P(q) = 1 + \sum_{n \geq 1} p(n) q^n = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - q^n}.$$

Die Funktion P steht in engem Zusammenhang mit der *Dedekindschen Eta-Funktion*, welche für $\tau \in \mathbb{H}$ durch $(q = e^{2\pi i \tau})$

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$$

definiert ist. Zeigen Sie, dass η eine Modulform ist. Betrachten Sie hierzu die *Eisenstein-Reihe vom Gewicht* 2, die wie folgt definiert ist:

$$G_2(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{m \neq 0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau + n)^2}.$$

Beachten Sie, dass wir für G_2 eine andere Normierung gewählt haben als für die Eisenstein-Reihen G_k für $k > 2$. Da die Konvergenz von G_2 von der Summationsreihenfolge abhängt, ist G_2 keine Modulform, hat allerdings trotzdem ein überschaubares Transformationsverhalten unter $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Satz 6.1. *Es sei* $\tau \in \mathbb{H}$ *und* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. *Dann gilt*

$$G_2\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 G_2(\tau) - \pi i c(c\tau + d).$$

Beweisen Sie diesen Satz und folgern Sie schließlich die Modularität von η.

Satz 6.2. *Es gilt*

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau),$$
$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\, \eta(\tau).$$

Ein wichtiger Schritt im Beweis von Satz 6.2 ist es zu zeigen, dass die logarithmische Ableitung von η (also $(\log(\eta))' = \frac{\eta'}{\eta}$) ein konstantes Vielfaches von G_2 ist.

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, The Encyclopedia of Mathematics and its Applications series, Cambridge University Press (1998).
[2] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008