TAUBERSCHE SÄTZE UND EINFÜHRUNG IN DIE KREISMETHODE ([1] S. 3, 7–8,[2] S. 11, 13, [3] S. 23–26)

Hardy und Ramanujan führten 1918 die sogenannte Kreismethode ein, um das asymptotische Wachstum von $p(n)$ zu untersuchen. Der Schlüssel hierzu ist, dass die erzeugende Funktion der Partitionsfunktion durch die Dedekindsche Eta-Funktion ausgedrückt werden kann. Die Modularität der Eta-Funktion führt nun dazu, dass ein gewisses Kreisintegral (hiervon stammt der Name der Methode) in eine handlichere Form umgeschrieben werden kann. Unter Verwendung der Kreismethode können wir den führenden asymptotischen Term von $p(n)$ $(n \to \infty)$ ermitteln. Etwa zwanzig Jahre später verfeinerte Rademacher die Kreismethode und konnte so eine exakte Formel für $p(n)$ (d.h. alle Terme der asymptotischen Entwicklung) herleiten.

Der führende asymptotische Term von $p(n)$ kann auch mit Hilfe des Tauberschen Satzes von Ingham berechnet werden. Im ersten Teil Ihres Vortrages sollen Sie dies erklären. Anschließend sollen Sie die Notation einführen, die in der Kreismethode von Hardy, Ramanujan und Rademacher auftritt. Im nächsten Vortrag werden wir diese Methode auf die Partitionsfunktion anwenden.

7.1. **Der Taubersche Satz von Ingham.** Sie sollen die Modularität der Eta-Funktion $\eta(\tau)$ benutzen, um das Wachstum von $P(q)$ für $\tau \to 0$ zu ermitteln. Zeigen Sie:

$$P(q) \sim \sqrt{-i\tau}e^{\frac{\pi i}{12\tau}}.$$

Ingham bewies 1941 folgenden Satz.

Satz 7.1. *Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f(\tau) = q^{n_0}\sum_{n\geq 0} a(n)q^n$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(1) *Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*
$$0 < a(n) \leq a(n+1).$$
(2) *Es existieren $c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{R}$ und $N > 0$, so dass für $\tau \to 0$*
$$f(\tau) \sim c(-i\tau)^{-d}e^{\frac{2\pi i N}{\tau}}.$$

Dann gilt für $n \to \infty$
$$a(n) \sim \frac{c}{\sqrt{2}N^{\frac{1}{2}(d-\frac{1}{2})}}n^{\frac{1}{2}(d-\frac{3}{2})}e^{4\pi\sqrt{Nn}}.$$

Ermitteln Sie mit Hilfe dieses Satzes das Wachstum von Partitionen:

Satz 7.2. *Für $n \to \infty$ gilt*
$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

7.2. **Definitionen und Notation für die Kreismethode.** In der Kreismethode treten sogenannte Farey-Folgen auf, die Sie in Ihrem Vortrag definieren sollen. Wir verwenden derartige Folgen, um das Intervall $[0, 1]$ in Unterintervalle zu zerlegen. Hierzu definieren wir für ein Element $\frac{h}{k}$ einer Farey-Folge F_N zwei Brüche

$$\theta'_{h,k} := \frac{1}{k(k_1+k)}, \qquad \theta''_{h,k} := \frac{1}{k(k_2+k)},$$

wobei

$$\frac{h_1}{k_1} < \frac{h}{k} < \frac{h_2}{k_2}$$

direkt aufeinanderfolgende Elemente in F_N sind.

Beweisen Sie nun folgendes Lemma.

Lemma 7.3. *Mit der Notation wie oben gilt*

$$\frac{h_1}{k_1} + \theta''_{h_1,k_1} = \frac{h}{k} - \theta'_{h,k}.$$

Darüberhinaus gilt für $j \in \{1, 2\}$

$$\frac{1}{k + k_j} < \frac{1}{N + 1}.$$

Wir benötigen ferner sogenannte Bessel-Funktionen. Die *Bessel-Funktion* I_s mit $s > 0$ ist durch

$$I_s(x) := \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!\Gamma(m + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+s}$$

definiert, worin Γ die klassische *Gamma-Funktion* ist: $(\mathrm{Re}(z) > 0)$

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Folgendes Lemma, das Sie angeben, aber nicht beweisen sollen, beschreibt das asymptotische Wachstum der Bessel-Funktionen.

Lemma 7.4. *Mit obigen Notationen gilt für* $x \to \infty$

$$I_s(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Schließlich treten in der Kreismethode sogenannte Kloosterman-Summen auf. Hierfür seien n und k natürliche Zahlen. Wir definieren die *Kloosterman-Summe*

$$A_k(n) := \frac{\sqrt{k}}{4\sqrt{3}} \sum_{\substack{x \pmod{24k} \\ x^2 \equiv 1 - 24n \pmod{24k}}} \chi_{12}(x) e^{\frac{2\pi i x}{12k}}$$

worin

$$\chi_{12}(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1 & \text{falls } n \equiv \pm 5 \pmod{12}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im folgenden Vortrag werden wir dann Rademachers exakte Formel für die Partitionsfunktion beweisen, die Sie zum Schluss Ihres Vortrages noch angeben sollen.

Satz 7.5. *Es sei* $n \geq 1$. *Dann gilt*

$$p(n) = \frac{2\pi}{(24n - 1)^{\frac{3}{4}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi\sqrt{24n - 1}}{6k} \right).$$

Literatur

[1] J. Booher, *The Circle Method,* the j-function, and partitions.
[2] K. Bringmann, Modular forms and related functions.
[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Fourth edition, The Clarendon Predd, Oxford, (1960).