DIE KREISMETHODE ([1], S. 73–81), [2] S. 6-8, [3], S. 13–18)

Führen Sie aufbauend auf der Notation aus dem vorherigen Vortrag die Kreismethode von Hardy, Ramanujan und Rademacher ein. In Ihrem Vortrag sollen Sie folgenden Satz beweisen.

Satz 8.1. *Es sei $n \geq 1$. Dann gilt*

$$p(n) = \frac{2\pi}{(24n-1)^{\frac{3}{4}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k(n)}{k} I_{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi\sqrt{24n-1}}{6k} \right).$$

Zunächst wenden wir die Cauchysche Integralformel an, um die Koeffizienten $p(n)$ von $P(q)$ als ein Integral zu schreiben: ($n \in \mathbb{N}$, $q = e^{2\pi i \tau}$)

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{P(q)}{q^{n+1}} dq,$$

worin $\mathcal{C}$ ein Kreis mit Radius kleiner als 1 ist und wir entgegen dem Uhrzeigersinn integrieren. Zerlegen Sie nun das Integral über $\mathcal{C}$ mit Hilfe von Farey-Folgen F_N (s. vorangegangener Vortrag) in N Bögen, deren Radius in Abhängigkeit von N gegen 0 konvergiert, so dass jeder Kreisbogen genau einen Farey-Bruch $\frac{h}{k}$ (mit $k < N$ und $\mathrm{ggT}(h,k) = 1$) enthält. Reparametrisieren Sie nun jeden einzelnen Bogen durch die Substitution $\tau = \frac{h}{k} + \frac{iz}{k}$.

Im 6. Vortrag hatten wir die modulare Transformationseigenschaft von $P(q)$ beschrieben. Formulieren Sie diese nun bzgl. der Variablen z und setzen Sie dann das Transformationsgesetz in das Integral ein. Folgern Sie, dass $P(q) - 1$ für $z \to 0$ „klein" ist. Erklären Sie, was hier unter „klein" zu verstehen ist und warum dieser Term in der Rechnung ignoriert werden kann. Folgern Sie, dass es genügt, das asymptotische Verhalten des folgenden Ausdrucks zu untersuchen.

$$\sum\nolimits_1 = \exp\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ 0 \leq h < k \\ \mathrm{ggT}(h,k)=1}} \exp\left(-\frac{2\pi i n h}{k}\right) \omega_{h,k} \int_{-\theta'_{h,k}}^{\theta''_{h,k}} z^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi}{12k}(z^{-1} - z)\right) \exp(-2\pi i n \phi) d\phi.$$

Wenden Sie den Residuensatz auf das Integral in Σ_1 an. Benutzen Sie nun folgende Identität (Beweis nicht erforderlich) um durch Grenzübergang $N \to \infty$ den Beweis von Satz 8.1 abzuschließen:

$$\frac{2\pi}{(24n-1)^{\frac{3}{4}}} \frac{1}{k} I_{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi\sqrt{24n-1}}{6k} \right) = 2\sqrt{k} \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} \exp\left(-2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right)t - \frac{\pi}{12k^2 t}\right) dt$$
$$- i\sqrt{k} \int_L t^{\frac{1}{2}} \exp\left(-2\pi\left(n - \frac{1}{24}\right)t - \frac{\pi}{12k^2 t}\right) dt.$$

Hierin ist L ein Weg um 0 mit Endpunkt $-\infty$, der gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, The Encyclopedia of Mathematics and its Applications series, Cambridge University Press (1998).

[2] J. Booher, *The Circle Method,* the j-function, and partitions.

[3] K. Bringmann, Modular forms and related functions.