DARSTELLUNGSANZAHLEN VON QUADRATISCHEN FORMEN ([1] S. 15–16, S. 23, S. 31–34)

Eine *quadratische Form* ist eine Funktion $Q : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$, die für jedes $X \in \mathbb{Z}^m$ und $\ell \in \mathbb{Z}$ die Bedingung

$$Q(\ell X) = \ell^2 Q(X)$$

erfüllt. Wir nennen eine quadratische Form Q *positiv definit*, falls für jedes $0 \neq X \in \mathbb{Z}^m$ gilt, dass $Q(X) > 0$. Es sei Q eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Werten und $n \geq 0$. Wir bezeichnen mit $R_Q(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n durch Q. Wir ordnen der quadratischen Form Q die *Theta-Reihe*

$$\Theta_Q(\tau) = \sum_{(X_1,\ldots,X_m)\in\mathbb{Z}^m} q^{Q(X_1,\ldots,X_m)} = \sum_{n\geq 0} R_Q(n) q^n$$

zu. Zunächst sollen Sie die Transformationseigenschaften von Θ_Q untersuchen.Dazu ist es hilfreich die quadratische Form explizit als Linearkombination von Produkten $X_i X_j$ with $1 \leq i \leq j \leq m$ zu schreiben: Es gibt eine eindeutig bestimmte symmetrische $m \times m$ Matrix A mit

$$Q(X) = \frac{1}{2} X^T A X.$$

Definieren Sie nun die *Stufe* und die *Diskriminante* einer quadratischen Form. Die Theta-Reihe Θ_Q ist eine Modulform in einem allgemeineren Sinn, als im ersten Vortrag definiert: Insbesondere muss das Transformationsgesetz einer derartigen Modulform nur für eine spezielle Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gelten, die von der Form

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

ist. Desweiteren definieren wir den *Dirichlet-Charakter* $\chi_\Delta(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right)$. Formulieren Sie folgenden Satz, ohne ihn zu beweisen:

Satz 9.1. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $Q : \mathbb{Z}^{2k} \to \mathbb{Z}$ eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Werten der Stufe N und Diskriminante Δ. Dann ist die Theta-Reihe Θ_Q eine Modulform zu $\Gamma_0(N)$ vom Gewicht k mit Charakter χ_Δ, d.h. für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ und jedes $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ gilt*

$$\Theta_Q\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \chi_\Delta(a)(c\tau + d)^k\, \Theta_Q(\tau).$$

Als nächstes sollen Sie die Eigenschaften von *geraden unimodularen quadratischen Formen* (d.h. von quadratischen Formen, die zu einer geraden unimodularen Matrix assoziiert sind) untersuchen. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ heißt hierbei *gerade*, falls $X^T A X$ für alle $X \in \mathbb{Z}^m$ gerade ist, und man nennt A *unimodular*, falls $\det(A) = \pm 1$ ist. Insbesondere sollen Sie ausgehend von den Ergebnissen des zweiten Vortrages das asymptotische Wachstum der Anzahl der Darstellungen von n durch eine gerade unimodulare quadratische Form für große n bestimmen.

Satz 9.1 impliziert, dass die zu einer positiv definiten geraden unimodularen quadratischen Form Q gehörende Theta-Reihe Θ_Q eine Modulform für $\Gamma_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit trivialem Charakter ist. Diese Tatsache hat zahlreiche Konsequenzen. Insbesondere folgt:

Satz 9.2. *Es sei $Q : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ eine positiv definite gerade unimodulare quadratische Form. Dann ist m durch 8 teilbar.*

Wiederholen Sie die Definition von Eisenstein-Reihen und Spitzenformen. Im zweiten Vortrag hatten wir gezeigt, dass jede Modulform eindeutig als Linearkombination einer Eisensteinreihe und einer Spitzenform vom selben Gewicht geschrieben werden kann. Erinnern Sie auch an Satz 2.3 aus dem 2. Vortrag. Leiten Sie aus diesem Satz nachstehende Folgerung her.

Satz 9.3. *Es sei $Q : \mathbb{Z}^{2k} \to \mathbb{Z}$ eine positiv definite gerade unimodulare quadratische Form. Dann ist die Anzahl der Darstellungen einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch Q für großes n durch folgende Formel gegeben:*

$$R_Q(n) = \frac{-2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n) + O\left(n^{\frac{k}{2}}\right) \quad (n \to +\infty).$$

Hierin bezeichnet B_k die k-te Bernoulli-Zahl.

Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008