ENDLICHKEIT DER ANZAHL EXTREMALER GITTER ([1] S. 35-36, [2] S. 277, 194, [3])

Im vorangegangenen Vortrag haben wir gesehen, dass die Modularität von Theta-Reihen viele Anwendungen in der Theorie der quadratischen Formen findet. Folgender Satz folgt aus der Tatsache, dass die zu einer positiv definiten geraden unimodularen quadratischen Form $Q : \mathbb{Z}^{2k} \to \mathbb{Z}$ gehörende Theta-Reihe Θ_Q in M_k liegt.

Satz 10.1. *Es sei $Q : \mathbb{Z}^{2k} \to \mathbb{Z}$ eine positiv definite gerade unimodulare quadratische Form. Dann ist das Minimum der Werte $Q(X)$ mit $X \in \mathbb{Z}^{2k} \setminus \{0\}$ höchstens* $\dim M_k = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1$.

Quadratische Formen, welche diese Schranke annehmen, nennen wir *extremale quadratische Formen.* Die dazu korrespondierenden Gitter nennen wir *extremale Gitter.* Geben Sie Beispiele von extremalen Gittern in den Dimensionen 8, 16 und 24 an. Beweisen Sie dann folgenden überraschenden Satz.

Satz 10.2. *Es gibt nur endlich viele nicht-isomorphe extremale gerade unimodulare quadratische Formen.*

Der Kern des Beweises ist in folgender Aussage enthalten.

Satz 10.3. *Es gibt eine Konstante k_0, so dass jede Modulform der Form*

$$F(\tau) = 1 + \sum_{n \geq \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1} a(n) e^{2\pi i n \tau}$$

vom Gewicht $k \geq k_0$ mindestens einen Fourier-Koeffizienten $a(n)$ mit negativem Realteil hat.

Skizzieren Sie den Beweis dieser Sätze wie in [1]. Einen vollständigen Beweis können Sie in [3] finden.

Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, *The 1-2-3 of modular forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008

[2] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.

[3] C. L. Mallows, A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane, *Upper bounds for modular forms, lattices, and codes,* J. Algebra, 36 (1975), pp. 68-76.