2. Die LAURENT-Entwicklung. Wie in 1.9(2) betrachtet man die EISENSTEIN-Reihe

(1) $$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für gerades } \ k \geq 4.$$

Nach Proposition 1.9 sind die entsprechenden Reihen für ungerades $k \geq 3$ gleich Null. Man setzt schließlich

$$\gamma := \gamma(\Omega) := \min\{|\omega|\,;\, 0 \neq \omega \in \Omega\}$$

und erhält den

Satz. *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ *gilt*

(2) $$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} \cdot z^{2n-2} = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \ldots \; .$$

Beweis. Aufgrund von

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} \, , \quad |t| < 1,$$

hat man für $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{(1-z/\omega)^2} - 1\right) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \, , \quad |z| < \gamma,$$

und daher

(∗) $$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right) \, , \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen

$$\left| m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right| \leq \gamma m \left(\frac{|z|}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot |\omega|^{-3}$$

und aufgrund des Konvergenz-Lemma 1.9 ist die Reihe (∗) in m und ω absolut konvergent. Nach Satz 1.8 darf man also umordnen und erhält

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m \geq 2} m G_{m+1} \cdot z^{m-1} \, , \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen Proposition 1.9 ist das aber (2). □

3. Die zweite Differentialgleichung. *Die* WEIERSTRASS*sche* $\wp$-*Funktion genügt der Differentialgleichung*

(1) $$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2 \wp - g_3.$$

Dabei sind g_2 und g_3 definiert durch

(2) $$g_2 := g_2(\Omega) := 60\ G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Omega) := 140\, G_6(\Omega)\,.$$

Man nennt g_2 und g_3 die WEIERSTRASS–*Invarianten* des Gitters Ω. Wir verwenden das LANDAU-*Symbol* und schreiben $\mathcal{O}(z^k)$ für eine Funktion $f(z)$, die $|f(z)| \le C \cdot |z|^k$ mit einem geeigneten C für z aus einer Umgebung von 0 erfüllt.

Beweis. Ausgehend von

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

(vgl. 2(2)) berechnet man

$$\begin{aligned}
\wp^2(z) &= z^{-4} + 6G_4 + 10G_6 \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3)\ ,\\
\wp^3(z) &= z^{-6} + 9G_4 \cdot z^{-2} + 15G_6 + \mathcal{O}(z)\ ,\\
\wp'(z) &= -2 \cdot z^{-3} + 6G_4 \cdot z + 20G_6 \cdot z^3 + \mathcal{O}(z^4)\ ,\\
\wp'^2(z) &= 4 \cdot z^{-6} - 24G_4 \cdot z^{-2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z)\ .
\end{aligned}$$

Daraus erhält man mit (2)

(∗) $$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = \mathcal{O}(z).$$

Hier gehört die linke Seite zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und hat Pole höchstens dort, wo $\wp$ oder $\wp'$ Pole hat. Nach (∗) ist die linke Seite aber bei 0 und daher überall holomorph. Satz 2.2A zeigt, dass diese Funktion konstant ist. Nach (∗) wiederum ist diese Konstante gleich Null. □

Differenziert man (1), so folgt das

Korollar A. *Es gilt*

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2.$$

Korollar B. *Für* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Beweis. Dies ist für $k = 0$ und 1 richtig. Wegen (2) folgt die Aussage für $k = 2$ aus Korollar A. Nun ergibt eine Induktion die Behauptung. □

Korollar C. *Für* $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ *sind quivalent:*
(i) f *ist holomorph in* $\mathbb{C} \setminus \Omega$.
(ii) $f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$.

Beweis. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Subtrahiert man $\alpha\wp^n$ bzw. $\alpha\wp^n \cdot \wp'$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, geeignet, von f, so kann man nun die Ordnung der Pole in den Gitterpunkten sukzessiv erniedrigen. Schließich beachte man noch $\mathrm{res}_0 f = 0$ nach Satz 2.2B.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Klar. □

Korollar D. *Für $n \geq 4$ gilt die Rekursionsformel*

$$(3) \qquad (n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{\substack{p\geq 2, q\geq 2 \\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

Beweis. Man trägt die LAURENT-Reihe 2(2) in $\wp'' + 30\, G_4 = 6\wp^2$ nach Korollar A ein:

$$\sum_{n\geq 2}(2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n}z^{2n-4} + 30G_4$$

$$= 12\sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n}z^{2n-4} + 6\sum_{p\geq 2}\sum_{q\geq 2}(2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}\ .$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt bereits die Behauptung. □

Speziell erhält man

$$(4) \quad 7G_8 = 3G_4^2\ ,\ 11G_{10} = 5G_4G_6\ , 143G_{12} = 42G_4G_8 + 25G_6^2 = 18G_4^3 + 25G_6^2$$

und das

Korollar E. *Für $k \geq 8$ gilt*

$$G_k \in \mathbb{Q}[G_4, G_6].$$

Korollar F. *Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit zugehörigen* WEIERSTRASS*–Invarianten g_2 und g_3. Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorphe, nicht-konstante Lösung f der Differentialgleichung*

$$f'^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$$

wird durch $f(z) = \wp(z+w)$, $z \in G$, mit geeignetem $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Ist $f \in \mathcal{M}$ eine solche Lösung, dann ist Ω das Periodengitter von f. Das Gitter Ω ist durch $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$, also auch durch $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei f eine in G meromorphe, nicht-konstante Lösung der angegebenen Differentialgleichung. Ist f in einer Kreisscheibe $U \subset G$ um u holomorph und f' ungleich Null in U, dann gilt bei geeigneter Wahl einer Wurzel $f' = \sqrt{4f^3 - g_2 f - g_3}$. Nach Lemma 2.3B wählt man nun ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\wp(w+u) = f(u)$ und darf darüber hinaus noch $\wp'(w+u) = f'(u)$ annehmen, indem man ggf. w durch $-w-2u$ ersetzt. Die Funktionen $f(z)$ und $g(z) := \wp(z+w)$ genügen der gleichen Differentialgleichung 1. Ordnung und stimmen im Punkt u überein. Dann folgt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$ aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. W. WALTER [2000], 66). Der Identitätssatz impliziert $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. Die fehlende Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass für die $\wp$-Funktion nach dem Konstruktions-Satz 1 das Periodengitter gleich der Polstellenmenge ist. □

Bemerkung. An Stelle der Differentialgleichung (1) kann man bei gegebener rationaler Funktion R allgemeiner nach Lösungen $w = f(z)$ der so genannten *binomischen Differentialgleichung*

$$w'^n = R(z, w) \tag{5}$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ fragen. Es gilt hier der

Satz von Malmquist und Yosida. *Besitzt* (5) *eine auf* $\mathbb{C}$ *meromorphe und transzendente Lösung, dann ist* $R(z, w)$ *ein Polynom in* w *von einem Grad* $\leq 2n$.

Einen *Beweis* findet man in E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, J. Wiley, New York 1976, Theorem 4.6.4. Eine Klassifikation der binomischen Differentialgleichungen beschreibt N. Steinmetz, Math. Ann. **244**, 263–274 (1979).

4. Ein Vergleich der Differentialgleichungen. Neben

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{1}$$

war in Satz 2.3 die Differentialgleichung

$$\wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3) \tag{2}$$

hergeleitet worden. Dabei waren e_1, e_2, e_3 wie in 2.3(3) durch

$$e_k = \wp(\omega_k/2)\ ,\ k = 1, 2, 3\ ,\ \omega_3 := \omega_1 + \omega_2, \tag{3}$$

definiert, wenn ω_1, ω_2 eine Basis von Ω ist. Da $\wp$ mehr als drei verschiedene Werte annimmt, ergibt ein Vergleich für eine Unbestimmte X über $\mathbb{C}$ den

Satz. *Es gilt*

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Aus Korollar 2.4A folgt dann

Korollar A. *Für über* $\mathbb{C}$ *unabhängige Unbestimmte* X, Y *gilt*

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X, Y),$$

wenn $I(X, Y)$ *das von* $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$ *in* $\mathbb{C}(X)[Y]$ *erzeugte Hauptideal ist.*

Ein Koeffizientenvergleich im Satz ergibt das

Korollar B. *Es gilt*

$$0 = e_1 + e_2 + e_3, \tag{4}$$

$$g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1), \tag{5}$$

$$g_3 = 4e_1e_2e_3. \tag{6}$$

Korollar C. *Es gilt*

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0.$$

Beweis. Mit (4) und (5) erhält man zunächst

$$(*) \qquad g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad \text{bzw.} \quad g_2^2 = 16(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2).$$

Weiter ergeben (4) und (5) dann auch noch

$$2(e_1 - e_2)^2 = 2(e_1^2 + e_2^2) - 4e_1e_2 = 2g_2 - 2e_3^2 + 4e_3(e_1 + e_2) = 2g_2 - 6e_3^2,$$

also

$$(e_1 - e_2)^2 = g_2 - 3e_3^2.$$

Da die durch zyklische Vertauschung der e_1, e_2, e_3 entstehenden Beziehungen ebenfalls gültig sind, hat man

$$\begin{aligned} &16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 = 16(g_2 - 3e_1^2)(g_2 - 3e_2^2)(g_2 - 3e_3^2) \\ &= 16g_2^3 - 3 \cdot 16g_2^2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 9 \cdot 16g_2(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2) - 27 \cdot 16e_1^2e_2^2e_3^2\ . \end{aligned}$$

Wegen $(*)$ und (6) ist die rechte Seite aber gleich $g_2^3 - 27g_3^2$. Nach 2.3(6) sind e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden. □

$$(7) \qquad \Delta := \Delta(\Omega) := g_2^3 - 27g_3^2$$

nennt man die *Diskriminante* und

$$(8) \qquad j := j(\Omega) := (12g_2)^3/\Delta$$

die *absolute Invariante* des Gitters Ω. Mit Korollar B und C folgt das

Korollar D. *Es gilt*

$$j = -4 \cdot 12^3 \cdot \frac{(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^3}{(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2}.$$

Korollar E. *Für* $\lambda := \dfrac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ *gilt*

$$j = 256 \cdot \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}.$$

Bemerkungen. a) Die Diskriminante Δ ist (bis auf einen Faktor) zugleich auch die Diskriminante des Polynoms $f(X) := 4X^3 - g_2X - g_3$ im Sinne der Algebra (vgl. S. LANG [1993], V, § 10): Dort wird die Diskriminante des Polynoms f (bis auf einen Faktor) als die *Resultante* von f und f' erklärt, also durch

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} = -64\Delta.$$

Schwerpunkt legen auf

a) Holomorphie der Abbildungen oder
b) Birationalität der Abbildungen oder
c) Erhalt metrischer Eigenschaften

usw. Keine dieser Verallgemeinerungen wird hier besprochen. Auf einige der bei Verallgemeinerungen wichtigen Aspekte wird jedoch in Abschnitten eingegangen, die bei einer ersten Lektüre überschlagen werden können.

§1. Die obere Halbebene

In diesem Paragrafen wird die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{C}$ genauer untersucht. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ wird beschrieben. Dann wird die hyperbolische Geometrie entwickelt.

1. Gebrochen lineare Transformationen. Wir schreiben 2×2 Matrizen meist in der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und benutzen wie üblich für *Determinante* und *Spur* die Abkürzungen

$$\det M := ad - bc \ , \ \operatorname{Sp} M := a + d \ ,$$

sowie

$$M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

für die *transponierte* bzw. *adjungierte* Matrix. Es bezeichne $GL(2;\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2 Matrizen,

$$GL(2;\mathbb{C}) := \{M \in \operatorname{Mat}(2;\mathbb{C}) \ ; \ \det M \neq 0\} \ .$$

Mit E wird die Einheitsmatrix abgekürzt. Bekanntlich wird die inverse Matrix zu $M \in GL(2;\mathbb{C})$ gegeben durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} M^\sharp = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Für $M \in GL(2;\mathbb{C})$ ist unter offensichtlichen Voraussetzungen an $\tau \in \mathbb{C}$ die komplexe Zahl

$$(1) \qquad M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

wohldefiniert. Damit wird durch

$$(2) \qquad \Phi_M : \tau \mapsto M\tau$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ gegeben, die auch als *gebrochen lineare Transformation* oder als MÖBIUS–*Transformation* bezeichnet wird. Für $c = 0$ ist Φ_M eine ganze Funktion. Im Fall $c \neq 0$ hat Φ_M genau einen Pol und zwar von 1. Ordnung bei $\tau = -d/c$.

Warnung: Die Schreibweise $M\tau$ darf nicht mit der skalaren Multiplikation τM von τ mit M verwechselt werden! Wenn Missverständnisse zu befürchten sind, schreibt man auch $M\langle\,\tau\rangle$ anstelle von $M\tau$.

Aus (1) folgert man für $L, M \in GL(2;\mathbb{C})$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ wieder unter offensichtlichen Voraussetzungen an τ und τ':

$$E\tau = \tau, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_E = \mathrm{id}, \tag{3}$$

$$(\lambda M)\tau = M\tau\ , \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{\lambda M} = \Phi_M, \tag{4}$$

$$(LM)\tau = L\langle M\tau\rangle, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M, \tag{5}$$

$$M\tau' - M\tau = \frac{\det M}{(c\tau' + d)(c\tau + d)} \cdot (\tau' - \tau) \tag{6}$$

Schließlich dividiert man (6) durch $\tau' - \tau$ und erhält für $\tau' \to \tau$

$$\Phi_M'(\tau) = \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{\det M}{(c\tau + d)^2} \tag{7}$$

Als Umkehrung von (4) hat man die

Proposition. *Für $L, M \in GL(2;\mathbb{C})$ sind äquivalent:*
(i) *$M\tau = L\tau$ gilt für wenigstens drei verschiedene $\tau \in \mathbb{C}$.*
(ii) *Es gibt $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $M = \lambda L$.*

Beweis. Wegen (5) und (3) ist $M\tau = L\tau$ mit $(L^{-1}M)\tau = \tau$ äquivalent. Man kann daher in beiden Fällen ohne Einschränkung $L = E$ annehmen. Da sich $M\tau = \tau$ jetzt als

$$c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0$$

schreibt, folgt die Behauptung. □

Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ kann durch eine Gleichung der Form

$$A\tau\overline{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, C \in \mathbb{R}\ ,\ A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C} \tag{8}$$

beschrieben werden. Genauer gilt dann $|B|^2 > AC$ und der Mittelpunkt m bzw. der Radius $r > 0$ werden gegeben durch

$$m = -\overline{B}/A \quad \text{bzw.} \quad r^2 = (|B|^2 - AC)/A^2. \tag{9}$$

Umgekehrt beschreibt (8) im Fall $A \neq 0$ und $|B|^2 > AC$ stets einen Kreis. Im Fall $A = 0$, $B \neq 0$ erhält man durch (8) genau alle Geraden in $\mathbb{C}$.

Zur Untersuchung der Bilder von Geraden und Kreisen unter den gebrochen linearen Transformationen (2) hat man $z = M\tau,\ M \in GL(2;\mathbb{C})$, zu betrachten. Man trägt $\tau = M^{-1}z$ in (8) ein, multipliziert die Nenner hoch und bekommt wieder eine Gleichung der Form

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + \gamma = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \text{ und } \beta \in \mathbb{C} \; .$$

Bei richtiger Interpretation erhält man den

Satz. *Unter gebrochen linearen Transformationen geht die Menge der Kreise und Geraden in* $\mathbb{C}$ *in sich über.*

Schließlich seien noch die offensichtlichen Regeln für das Rechnen mit Unendlich erklärt. Ist M in der Standardform gegeben, so definiert man

$$M\infty := \begin{cases} \infty, & \text{falls } c = 0, \\ a/c, & \text{falls } c \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

Bemerkungen. a) Die Gleichungen (3), (5) und (10) besagen, dass durch (1) eine Gruppenoperation von $GL(2;\mathbb{C})$ auf $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gegeben wird. Nach der Proposition gilt $\Phi_M = \Phi_L$ für $M, L \in SL(2;\mathbb{C})$ nur für $M = \pm L$. Vermöge (2) erhält man eine natürliche Identifikation der Gruppe Aut $\mathbb{P}$ der biholomorphen Selbstabbildungen von $\mathbb{P}$ mit der Gruppe $PSL(2;\mathbb{C}) := SL(2;\mathbb{C})/\{\pm E\}$ (vgl. W. Fischer, I. Lieb [1992], Satz IX.3.1).
b) Ist $f : \mathfrak{U} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\mathfrak{U} \subset \mathbb{C}$, so ist die Schwarz–*Derivierte* Σf von f definiert durch

$$(\Sigma f)(z) := \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 \;, \; z \in \mathfrak{U} \; .$$

Mit Hilfe von (7) verifiziert man nun $\Sigma(\Phi_M \circ f) = \Sigma f$ für alle $M \in GL(2;\mathbb{C})$. *Ist also* f *eine Lösung der Differentialgleichung* $\Sigma f = \varphi$*, so ist auch* $\Phi_M \circ f$ *für* $M \in GL(2;\mathbb{C})$ *eine Lösung.*

2. Die obere Halbebene und der Einheitskreis. Wie bereits in Kapitel I wird die *obere Halbebene* in $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{H}$ bezeichnet, also

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \; ; \; \operatorname{Im} \tau > 0\} \; .$$

Darüber hinaus bezeichnen wir den *Einheitskreis* mit $\mathbb{E}$, also

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} \; ; \; |z| < 1\} \; .$$

Ist G ein beliebiges Gebiet in $\mathbb{C}$, so steht

$$\operatorname{Aut} G := \{\varphi : G \to G \; ; \; \varphi \text{ biholomorph}\}$$

für die *Automorphismengruppe von* G.

Kapitel III.

Modulformen

Einleitung

1. Vorbemerkung. Wie die elliptischen Funktionen unter gewissen Selbstabbildungen von $\mathbb{C}$, nämlich den Translationen eines Gitters, in sich übergehen, so sind die *Modulfunktionen* unter geeigneten Selbstabbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$, nämlich den *Modulsubstitutionen*

$$\tau \longmapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma := SL(2;\mathbb{Z})$$

invariant. Das wichtigste Beispiel einer solchen Funktion, die überdies auf $\mathbb{H}$ holomorph ist, ist die *absolute Invariante* $j = j(\tau)$, die wir bereits in I.4.4 und in II.E.3 kennen gelernt haben. Es wird sich herausstellen, dass man mit j alle Modulfunktionen beschreiben kann.

2. Mögliches Transformationsverhalten. Neben Funktionen, die unter den Modulsubstitutionen invariant bleiben, sind aber auch Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ von Interesse, die unter den Modulsubstitutionen wenigstens noch ein übersichtliches Verhalten aufweisen:

$$(1) \qquad f(M\tau) = \gamma_M(\tau) \cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma.$$

Dabei sei $\gamma_M(\tau)$ ein „elementarer“ Faktor, der noch genauer festgelegt werden muss. Schreibt man (1) für MN anstelle von M und verwendet $(MN)\tau = M(N\tau)$, so erhält man (im Fall $f(\tau) \neq 0$) die Bedingung

$$(2) \qquad \gamma_{MN}(\tau) = \gamma_M(N\tau) \cdot \gamma_N(\tau) \quad \text{für} \quad M, N \in \Gamma \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

an γ. Diese „Cozykel–Bedingung“ hat Ähnlichkeit mit der Kettenregel der Differentiation. In der Tat erfüllen

$$(3) \qquad \gamma_M(\tau) := \frac{dM\tau}{d\tau} = (c\tau + d)^{-2}$$

und jede Potenz davon (2). Die auf diese Weise für jede gerade Zahl k entstehende Transformationsformel

$$(4) \qquad f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für} \quad M \in \Gamma$$

ist dann charakteristisch für die so genannten *Modulformen*. Da die Gruppe der Modulsubstitutionen gemäß Korollar II.2.1A durch die Abbildungen

$$(5) \qquad \tau \longmapsto \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau \longmapsto -1/\tau$$

erzeugt wird, kann man (4) durch die beiden Bedingungen

$$(6) \qquad f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau)$$

ersetzen.

In I.4.1 hatten wir gesehen, dass die EISENSTEIN–Reihen G_k Beispiele von solchen Funktionen sind. Es soll noch ein weiteres Beispiel skizziert werden, das ein zu (6) analoges Transformationsverhalten besitzt:

3. Die klassische Theta–Reihe. In seinen Briefen an GOLDBACH vom 4. 5. 1748 und 17. 8. 1750 behandelt L. EULER im Reellen bereits die *Theta–Reihe*

$$(1) \qquad \vartheta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{mit} \quad q := e^{\pi i \tau} \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung tritt die Theta–Reihe dann bei J. FOURIER in *Théorie Analytique de la Chaleur* (Paris 1822) auf (vgl. I.6.7). Im Nachlass von C.F. GAUSS (*Werke III*, 436–445) fand man eine Note etwa aus dem Jahre 1808, in der eine etwas allgemeinere Reihe (nämlich die in I.6.7(1) definierte JACOBIsche Theta–Reihe $\vartheta(z;\tau)$) betrachtet und für sie bereits eine Transformationsformel bewiesen wird. In den *Fundamenta nova* wird dann von C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke I*, 198–239) die allgemeine Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nx)$$

unter dem Buchstaben Θ eingeführt und zur Darstellung der elliptischen Funktionen verwendet. In der Bezeichnung von I.6.7 ist $\vartheta(\tau)$ gleich dem *Nullwert* $\vartheta(0;\tau)$.

Offenbar ist $\vartheta(\tau)$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{H}$, so dass $\vartheta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Es gilt darüber hinaus

$$(2) \qquad \vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}.$$

Die Bedeutung und das Interesse, das die Theta–Reihe immer wieder gefunden hat, liegen nun in der so genannten

Theta–Transformationsformel:

$$(3) \qquad \vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv ist.

Beweis. Man wendet die so genannte POISSONsche Summationsformel auf $\vartheta(iy)$, $y > 0$, an oder – was auf dasselbe hinausläuft – entwickelt die modulo 1 periodische, stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

in eine FOURIER–Reihe und erhält

$$\begin{aligned} \vartheta(iy) &= \varphi(0) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m, \\ \alpha_m &:= \int_0^1 \varphi(t)\cdot e^{-2\pi imt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 y}\cdot e^{-2\pi imt}dt. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\alpha_m = \beta_m(y)\cdot e^{-\pi m^2/y} \quad \text{mit} \quad \beta_m(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(t\sqrt{y}+im/\sqrt{y}\right)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\beta_{m/\sqrt{y}}(1).$$

Nach dem CAUCHYschen Integralsatz hängt $\beta_m(1) = \beta$ nicht von m ab (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.4.3) und man erhält

$$\vartheta(iy) = \frac{\beta}{\sqrt{y}}\cdot\vartheta\left(\frac{i}{y}\right) \quad \text{für } \ y > 0.$$

Setzt man nun $y = 1$, so folgt $\beta = 1$ wegen $\vartheta(iy) > 0$. Die Transformationsformel ergibt sich nun durch analytische Fortsetzung. □

Einen elementaren Beweis der POISSONschen Summationsformel findet man z. B. bei M. KOECHER [1987], 179–181.

Betrachtet man jetzt $f(\tau) := \vartheta^8(\tau)$, so erhält man in Analogie zu 2(6)

(4) $$f(\tau+2) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^4\cdot f(\tau).$$

Damit kennt man das Transformationsverhalten von $f = \vartheta^8$ unter der von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto \tau + 2$ und $\tau \mapsto -1/\tau$ erzeugten Gruppe von Automorphismen von $\mathbb{H}$. Mit der *Theta–Gruppe* Γ_ϑ in II.3.4 folgt

$$f(M\tau) = (c\tau+d)^4\cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma_\vartheta.$$

Ein anderer – ebenfalls durch II.3.4 nahegelegter – Ansatz liefert eine Funktion, bei der man das Transformationsverhalten unter allen Modulsubstitutionen kennt: Man setzt

(5) $$g(\tau) := \tfrac{1}{\tau}\cdot\vartheta^2(\tau)\cdot\vartheta^2(\tau+1)\cdot\vartheta^2(1-1/\tau)$$

und verifiziert mit (2) und (3)

$$g(\tau+1) = i\cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(-1/\tau) = i\cdot\tau^3\cdot g(\tau).$$

Die vierte Potenz von g ist daher eine Modulform im Sinne von 2(6) zu $k = 12$. Man vergleiche Satz 4.5 d).

§1. Die elementare Theorie

Ziel dieses Paragrafen ist es, die elementare Theorie modularer Funktionen zu entwickeln und erste Strukturaussagen herzuleiten.
Es wird vereinbart, den Buchstaben M für 2×2 Matrizen zu reservieren und stets $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ zu schreiben. τ aus der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ wird immer in der Form $\tau = x + iy$ gegeben.

1. Modulare Funktionen. Zunächst wird eine Operation von $SL(2;\mathbb{R})$ auf dem Raum der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{H}$ erklärt:
Sei dazu $k \in \mathbb{Z}$ und f auf $\mathbb{H}$ meromorph. Dann existiert eine diskrete und relativ abgeschlossene Teilmenge D_f von $\mathbb{H}$, so dass f auf $\mathbb{H}\backslash D_f$ holomorph ist. Für $M \in SL(2;\mathbb{R})$ erklärt man eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion $f|M = f|_k M$ durch

(1) $$(f|M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_{f\circ M}.$$

Auf die Angabe des Buchstabens $k \in \mathbb{Z}$ wird hier meist verzichtet. Zusammen mit II.1.1(5) ergibt eine Verifikation

(2) $$(f|M)|N = f|(MN) \quad \text{für} \quad M, N \in SL(2;\mathbb{R}).$$

Damit definiert $(M, f) \mapsto f|M$ eine Operation auf dem Raum der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{H}$, die *Strichoperator* genannt wird.

Man nennt nun f *modular vom Gewicht* k, wenn gilt:

(M.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

Offenbar bilden die modularen Funktionen vom Gewicht k einen Vektorraum über $\mathbb{C}$. Trägt man $M = -E$ in (M.2) ein, so erhält man die

Proposition. *Jede modulare Funktion von ungeradem Gewicht ist* 0*.*

Es wird daher im Folgenden stets vorausgesetzt, dass k gerade ist. Wegen (2) und Satz II.2.1 kann man (M.2) ersetzen durch

(M.2*) $$f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau).$$

Schließlich zeigt II.1.1(7), dass man (1) auch in der Form

(3) $$(f|M)(\tau) = \left(\frac{dM\tau}{d\tau}\right)^{k/2} \cdot f(M\tau)$$

schreiben kann.

2. Periodische Funktionen. Es bezeichne wieder

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$$

die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Bekanntlich definiert

$$\mathbb{H} \to \mathbb{E} \setminus \{0\},\ \tau \mapsto z := e^{2\pi i\tau},$$

eine surjektive und modulo 1 periodische holomorphe Funktion. Ist f auf $\mathbb{H}$ meromorph mit Polstellenmenge D_f und periodisch mit der Periode 1 (vgl. I.1.2), dann gibt es bekanntlich (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.3.2) eine auf $\mathbb{E} \setminus \{0\}$ meromorphe Funktion $\hat{f}$ mit

$$f(\tau) = \hat{f}\,(e^{2\pi i\tau}) \quad \text{für} \quad \tau \in \mathbb{H} \setminus D_f. \tag{1}$$

Ist nun umgekehrt $\hat{f}$ eine auf $\mathbb{E}\setminus\{0\}$ meromorphe Funktion, so ist die zugehörige Funktion f der Form (1) auf $\mathbb{H}$ meromorph und periodisch mit der Periode 1. Man beachte hier, dass sich die Pole von $\hat{f}$ bei 0 häufen können! Um dies auszuschließen, sagt man, dass f *bei* ∞ *höchstens einen Pol* hat, wenn $\hat{f}$ meromorph auf $\mathbb{E}$ fortsetzbar ist.

Hat nun f in diesem Sinne bei ∞ höchstens einen Pol, dann ist 0 eine isolierte Singularität von $\hat{f}$ und es existiert eine LAURENT–Entwicklung von $\hat{f}$ um 0 mit endlichem Hauptteil (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.2.3)

$$\hat{f}(z) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot z^m, \tag{2}$$

die in einer punktierten Umgebung von 0 absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert. Wegen (1) ist dann f in eine FOURIER–Reihe

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \tag{3}$$

entwickelbar, die bei geeignetem $\gamma > 0$ für $\operatorname{Im}\tau > \gamma$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert. Die Integralformel für die Koeffizienten der LAURENT–Reihe (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.1.3) übersetzt sich dabei in

$$\alpha_f(m) = \int_w^{w+1} f(\tau) \cdot e^{-2\pi i m\tau} d\tau, \tag{4}$$

wobei die Integration für $\operatorname{Im} w > \gamma$ z. B. längs der Strecke von w bis $w + 1$ auszuführen ist.

Lemma. *Für eine auf* $\mathbb{H}$ *meromorphe und modulo* 1 *periodische Funktion* $f \neq 0$ *sind äquivalent:*

(i) f *hat bei* ∞ *höchstens einen Pol.*
(ii) *Es gibt* $\gamma > 0$ *mit folgenden Eigenschaften:*
  (a) f *ist auf dem Gebiet* $\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ \operatorname{Im}\tau > \gamma\}$ *holomorph.*
  (b) *Es gibt ein* $m_0 \in \mathbb{Z}$*, so dass es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* C *gibt mit*

$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \cdot \operatorname{Im} \tau} \quad \textit{für alle } \tau \textit{ mit} \quad \operatorname{Im} \tau \geq \gamma + \varepsilon.$$

Dabei ist m_0 das Minimum der $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_f(m) \neq 0$.

Ist dies der Fall und ist f auf $\mathbb{H}$ holomorph, dann gilt (b) *für alle $\gamma > 0$.*

Beweis. Alles wird auf das Verhalten von $\hat{f}$ in einer Umgebung von 0 zurückgespielt: Man hat für $\hat{f}$ genau dann ein LAURENT–Reihe der Form (2), wenn eine Abschätzung der Gestalt $|\hat{f}(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0}$ gilt. □

Ist m_0 wie im Lemma gewählt, so sagt man in Übereinstimmung mit dem Verhalten von $\hat{f}$ bei 0, *dass f bei ∞*

einen Pol der Ordnung $-m_0$ hat, falls $m_0 < 0$ gilt,
holomorph ist, falls $m_0 \geq 0$ gilt,
eine Nullstelle der Ordnung m_0 hat, falls $m_0 > 0$ gilt.

Man setzt nun natürlich

(5) $$\operatorname{ord}_\infty f := m_0.$$

3. Der Begriff der Modulform. Eine Funktion f heißt *Modulform vom Gewicht k,* wenn f modular vom Gewicht k ist und bei ∞ höchstens einen Pol hat, wenn also gilt:

(M.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

(M.3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol.

Wegen Lemma 2 kann hier (M.3) ersetzt werden durch

(M.3*) f besitzt eine FOURIER–Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die bei geeignetem $\gamma > 0$ für $\operatorname{Im} \tau \geq \gamma$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert.

Da mit f und g auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, und $f \cdot g$ höchstens einen Pol bei ∞ haben, ergibt ein Blick auf 1(1), *dass die Modulformen vom Gewicht k einen Vektorraum $\mathbb{V}_k$ über $\mathbb{C}$ bilden.* Es gilt außerdem

(1) $$\mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_\ell \subset \mathbb{V}_{k+\ell} \qquad \textit{für} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wegen Proposition 1 hat man natürlich

(2) $$\mathbb{V}_k = \{0\} \quad \text{für ungerades} \quad k.$$

Schließlich ist

(3) $$\tfrac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k} \qquad \text{für} \quad 0 \neq f \in \mathbb{V}_k \ .$$

Eine Modulform vom Gewicht 0 heißt eine *Modulfunktion*. Wegen (1) und (3) ist die Menge

(4) $$\mathbb{K} := \mathbb{V}_0$$

aller Modulfunktionen ein Körper, der die konstanten Funktionen und alle Quotienten von Modulformen desselben Gewichts enthält.

Bemerkungen. a) Der Name *Modulfunktion* stammt von R. DEDEKIND (*Ges. math. Werke I*, 159–172). Eine Modulfunktion tritt zunächst als *Modul* bei elliptischen Integralen in der LEGENDREschen Normalform auf. Es handelt sich dabei allerdings um eine Funktion, die nicht zur Modulgruppe Γ, sondern zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[2]$ gehört (vgl. I.E.2, Korollar I.3.4E, Aufgabe I.4.7). Modulformen treten systematisch zuerst bei WEIERSTRASS in seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen als die Invarianten g_2 und g_3 bzw. als Δ auf (vgl. I.4.1), nachdem diese vorher von G. EISENSTEIN betrachtet wurden (vgl. I.3.7).
Eigentliche Begründer der Theorie der Modulfunktionen sind F. KLEIN und H. POINCARÉ. Die Hauptwerke von POINCARÉ zu diesem Thema findet man in den ersten Bänden der Acta Mathematica (nämlich in Band 1, 3, 4, 5) und in seinen *Œuvres II*. Wichtige Arbeiten von KLEIN findet man in seinen *Ges. math. Abhandlungen III*. Die Theorie wurde dann zunächst von R. FRICKE fortgeführt, von dem der ausführliche Übersichtsartikel II.B4 *Automorphe Funktionen* in der *Enzyklopädie der Math. Wissenschaften* stammt.
b) Auf R. DEDEKIND geht die abkürzende Schreibweise $1^\tau := e^{2\pi i\tau}$ zurück (*Ges. math. Werke I*, 174–201), die auch später manchmal verwendet wird, sich aber allgemein nicht durchgesetzt hat.

4. Ganze Modulformen. Eine Modulform f vom Gewicht k heißt eine *ganze Modulform vom Gewicht k*, wenn f auf $\mathbb{H}$ holomorph ist und wenn f bei ∞ *keinen* Pol hat. Damit ist f genau dann eine ganze Modulform vom Gewicht k, wenn gilt:

(M.1') $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

(M.2') $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

(M.3') f ist für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im}\tau \geq \gamma$, $\gamma > 0$, beschränkt.

Wegen Lemma 2 kann man hier (M.3') ersetzen durch

(M.3") f besitzt eine FOURIER–Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

die für $\gamma > 0$ auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H}\ ;\ \operatorname{Im}\tau \geq \gamma\}$ absolut gleichmäßig konvergiert.

Die Menge $\mathbb{M}_k$ *der ganzen Modulformen von Gewicht k ist offenbar ein Unterraum des Vektorraums* $\mathbb{V}_k$.

Eine ganze Modulform f heißt eine *Spitzenform* (englisch: *cusp form*), wenn f bei ∞ eine Nullstelle hat, wenn also $\alpha_f(0) = 0$ gilt. Der Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht k wird mit $\mathbb{S}_k$ bezeichnet. Man hat offenbar

$$\mathbb{S}_k \subset \mathbb{M}_k \subset \mathbb{V}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Aus (M.3") folgt sofort

(1) $$\alpha_f(0) = \lim_{y\to\infty} f(iy) \quad \text{für } f \in \mathbb{M}_k.$$

Im Hinblick auf 3(1) erhält man dann

(2) $$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{M}_{k+\ell}, \quad \mathbb{S}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{S}_{k+\ell} \quad \text{für} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wegen seiner Bedeutung wiederholen wir einen Spezialfall von Lemma 2 als

Lemma. *Ist $f \in \mathbb{M}_k$ und $\gamma > 0$, so gilt*

$$f(\tau) - \alpha_f(0) = \mathcal{O}\left(e^{-2\pi \operatorname{Im}\tau}\right)$$

auf der Menge $\{\tau \in \mathbb{H}\ ;\ \operatorname{Im}\tau \geq \gamma\}$.

Im weiteren Verlauf werden ausschließlich der Körper $\mathbb{K} = \mathbb{V}_0$ der Modulfunktionen und die Vektorräume $\mathbb{M}_k$ der ganzen Modulformen vom Gewicht k studiert.

5. Negatives Gewicht. Für $f \in \mathbb{M}_k$ wird $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ erklärt durch

(1) $$\tilde{f}(\tau) := (\operatorname{Im}\tau)^{k/2} \cdot |f(\tau)|\ ,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

Aus II.1.3(1) und 1(1) erhält man offenbar

(2) $$\tilde{f}(M\tau) = \tilde{f}(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma,$$

so dass $\tilde{f}$ eine unter Γ invariante Funktion ist. Die genaue Kenntnis des exakten Fundamentalbereiches $\mathbb{F}$ aus II.2.2 führt speziell zu der

Proposition. *Ist $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ für $\operatorname{Im}\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt und gilt*

$$\varphi(M\tau) = \varphi(\tau) \quad \textit{für alle} \ \ M \in \Gamma,$$

dann ist φ auf $\mathbb{H}$ beschränkt.

Beweis. Nach II.2.2(3) ist φ speziell im Fundamentalbereich $\mathbb{F}$ beschränkt. Nun kann man Satz II.2.2a anwenden und sieht, dass φ auf $\mathbb{H}$ beschränkt ist. □

Als erstes Strukturergebnis erhalten wir den

Satz. *Es gilt* $\mathbb{M}_k = \{0\}$ *für* $k < 0$.

Beweis. Nach (M.3") ist f speziell für alle τ mit Im $\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt. Da k negativ ist, gilt dies dann auch für $\tilde{f}$. Nun kann man die Proposition auf $\varphi = \tilde{f}$ anwenden und sieht, dass $\tilde{f}$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt ist.

Man entwickelt f in eine FOURIER–Reihe und erhält für die FOURIER–Koeffizienten gemäß 2(4)

$$\alpha_f(m) = e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 f(x+iy) \cdot e^{-2\pi imx} dx \ , \ m \geq 0.$$

Mit (1) folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \tilde{f}(x+iy) dx \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my}$$

mit einer von y unabhängigen Konstanten C. Da die linke Seite ebenfalls nicht von y abhängt, kann man den Limes $y \to 0$ bilden und erhält $\alpha_f(m) = 0$ für alle $m \geq 0$, also $f \equiv 0$. □

6. Das Wachstum der FOURIER–Koeffizienten. Für $f \in \mathbb{M}_k$ wird $\tilde{f}$ wie in 5(1) erklärt.

Satz. *Für* $k > 0$ *und* $f \in \mathbb{M}_k$ *gilt:*
a) $\tilde{f}$ *ist genau dann auf* $\mathbb{H}$ *beschränkt, wenn* $f \in \mathbb{S}_k$ *gilt. In diesem Fall existiert ein* $w \in \mathbb{H}$ *mit der Eigenschaft*

$$\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(w) \quad \textit{für alle } \ \tau \in \mathbb{H}.$$

b) *Ist* $f \in \mathbb{S}_k$, *so gilt*

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}\big(m^{k/2}\big) \quad \textit{für alle } \ m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. a) Ist f eine Spitzenform, so ist $\tilde{f}$ wegen Lemma 4 für Im $\tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 5. Ist umgekehrt $\tilde{f}$ beschränkt, so sind wegen Lemma 4 auch $\alpha_f(0) \cdot y^{k/2}$ in $\mathbb{F}$ beschränkt. Aus $k > 0$ folgt $\alpha_f(0) = 0$, also $f \in \mathbb{S}_k$. Die Existenz von w ergibt sich aus $\lim_{y\to\infty} \tilde{f}(\tau) = 0$ nach Lemma 4.
b) Man entwickelt f in eine FOURIER–Reihe und wie im Beweis von Satz 5 folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \qquad \text{für } y > 0.$$

Da die linke Seite nicht von y abhängt, darf man rechts $y = 1/m \ , \ m > 0$, eintragen und erhält

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot e^{2\pi} \cdot m^{k/2},$$

also die Behauptung. □

Aufgaben. Es bezeichne $A(\mathbb{H})$ die Menge aller modulo 1 periodischen, auf $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ holomorphen Funktionen $f: \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit zugehöriger FOURIER–Reihe der Form

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}\ ,\ \tau \in \mathbb{H},$$

gemäß Lemma 2. $A(\mathbb{H})$ ist offenbar eine $\mathbb{C}$–Algebra, die alle ganzen Modulformen enthält. Es bezeichne $B(\mathbb{H})$ die Teilmenge derjenigen $f \in A(\mathbb{H})$, zu denen es ein $\ell \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^\ell) \quad \text{für } m \geq 1.$$

Für $f \in B(\mathbb{H})$ setzt man

$$\kappa(f) := \inf\left\{\ell \geq 0\ ;\ \alpha_f(m) = \mathcal{O}\left(m^\ell\right) \quad \text{für } m \geq 1\right\}.$$

1) $B(\mathbb{H})$ ist eine Unteralgebra von $A(\mathbb{H})$. Speziell gilt für $f, g \in B(\mathbb{H})$:
   a) $\kappa(f+g) \leq \max\{\kappa(f),\ \kappa(g)\}$,
   b) $\kappa(f \cdot g) \leq \kappa(f) + \kappa(g) + 1$.
2) Ist $f \in A(\mathbb{H})$ und $(\operatorname{Im}\tau)^\kappa \cdot f(\tau)$ für ein $\kappa \geq 0$ auf $\mathbb{H}$ beschränkt, dann gehört f zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq \kappa$.
3) Ist $f \in \mathbb{S}_k$, so gehört f zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq k/2$.
4) Ist $f \in B(\mathbb{H})$, so konvergiert die DIRICHLET–Reihe

$$D_f(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot m^{-s}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \kappa(f) + 1$ absolut.
5) Die Funktion $f(\tau) = \vartheta(2\tau)$ (vgl. E.3) gehört zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) = 0$ und $D_f(s) = 2\zeta(2s)$.
6) $B(\mathbb{H})$ ist eine echte Unteralgebra von $A(\mathbb{H})$.
7) Zu $f \in \mathbb{M}_k$ definiert man eine Funktion

$$f^* : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\quad \tau \longmapsto \overline{f(-\overline{\tau})}.$$

Dann gilt $f^* \in \mathbb{M}_k$ und $f^{**} = f$. Die FOURIER–Koeffizienten von f sind genau dann reell, wenn $f^* = f$. Die FOURIER–Koeffizienten von f sind genau dann rein imaginär, wenn $f^* = -f$.
8) $\mathbb{M}_k$ besitzt eine Basis aus ganzen Modulformen mit reellen FOURIER-Koeffizienten.
9) $f \in \mathbb{M}_k$ ist genau dann eine Spitzenform, wenn es zu jedem $\gamma > 0$ positive Konstanten α und β gibt, so dass

$$|f(\tau)| \leq \alpha \cdot e^{-\beta y} \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H} \quad \text{mit } y \geq \gamma.$$

10) Sei $f \in \mathbb{M}_k$ und $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Es gilt $f(i) = 0$, falls $k \not\equiv 0 \pmod 4$, und $f(\rho) = 0$, falls $k \not\equiv 0 \pmod 6$.
11) Für $f \in \mathbb{S}_k$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} f(r + iy) = 0.$$

Für $f \in \mathbb{M}_k$, $f \notin \mathbb{S}_k$, $k > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} |f(r + iy)| = \infty.$$

§2. Beispiele

1. Die EISENSTEIN–Reihen. Die klassischen Beispiele für ganze Modulformen sind die EISENSTEIN–*Reihen*

$$G_k(\tau) := \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k} \quad \text{für} \;\; k \geq 3 \;\; \text{ganz} \tag{1}$$

gemäß I.1.9(2) bzw. I.3.2(1). Dabei soll der Strich am Summenzeichen bedeuten, dass die Summe über alle Paare $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(m,n) \neq (0,0)$ zu erstrecken ist. Obwohl die wesentlichen Eigenschaften der G_k bereits in I.§4 hergeleitet wurden, sollen hier einige davon mit anderen Beweisen neu begründet werden:

Proposition. *Zu jedem Kompaktum $\mathcal{K}$ in $\mathbb{H}$ gibt es positive Konstanten γ und δ mit*

$$\gamma \cdot |mi + n| \leq |m\tau + n| \leq \delta \cdot |mi + n|$$

für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und alle $\tau \in \mathcal{K}$.

Beweis. Aus Homogenitätsgründen darf man $m^2 + n^2 = 1$, also $|mi + n| = 1$ voraussetzen. Dann nimmt aber die stetige Funktion

$$(\tau,\, m,\, n) \;\mapsto\; |m\tau + n|$$

auf der kompakten Menge $\mathcal{K} \times \{(m,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;;\; m^2 + n^2 = 1\}$ ein Minimum γ und ein Maximum δ an. Da $\operatorname{Im} \tau$ für $\tau \in \mathcal{K}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, gilt $\gamma > 0$. □

In Analogie zu I.1.9 erhält man nun das

Konvergenz–Lemma. *Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ ist G_k absolut und kompakt–gleichmäßig konvergent. Damit ist G_k eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$.*

Beweis. Nach der Proposition braucht nur die Konvergenz von

$$\sum_{m,n}{}' (m^2 + n^2)^{-\alpha} \quad \text{für} \;\; \alpha > 1$$

bewiesen zu werden. Den wohl einfachsten Beweis hierfür findet man bereits bei WEIERSTRASS (*Math. Werke V*, 117): Mit Hilfe der Ungleichung $m^2 + n^2 \geq |mn|$ erhält man

$$\sum_{E} (m^2 + n^2)^{-\alpha} \leq 4 \sum_{m \geq 1} m^{-2\alpha} + 4 \Bigg(\sum_{m \geq 1} m^{-\alpha} \Bigg)^2 \leq 4(\zeta(2\alpha) + \zeta^2(\alpha)) < \infty$$

für $\alpha > 1$ und jede endliche Teilmenge E von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0,0)\}$. □

Eine einfache Konsequenz (vgl. I.4.2(5)) ist das folgende Transformationsverhalten der EISENSTEIN-Reihen.

Transformations–Lemma. *Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ und alle $M \in \Gamma$ gilt $G_k|_k M = G_k$, d. h.*

$$(2) \qquad G_k(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau)\ ,\ \tau \in \mathbb{H}.$$

Beweis. Wegen

$$(m \cdot M\tau + n) \cdot (c\tau + d) = m'\tau + n' \quad \text{mit} \quad (m', n') = (m, n) \cdot M$$

durchläuft nach dem Äquivalenz–Satz I.1.5 mit (m, n) auch (m', n') alle Paare ganzer Zahlen genau einmal. □

Mit $M = -E$ erhält man das

Korollar A. *Es gilt $G_k = 0$ für ungerades $k \geq 3$.*

Aus Kapitel I übernehmen wir den Satz 4.2, dessen Beweis keinen direkten Bezug zur Theorie der elliptischen Funktionen benötigte: Für gerades $k \geq 4$ gilt

$$(3) \qquad G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

Es ist zweckmäßig, neben der Reihe G_k auch die *normierte* EISENSTEIN–Reihe

$$(4) \qquad G_k^* := \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k\ ,\ k \geq 4 \ \text{gerade},$$

zu betrachten. Da jedes Paar ganzer Zahlen $(m, n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$ sich eindeutig in der Form $(m, n) = (t\mu, t\nu)$ mit $t \in \mathbb{N}$ und teilerfremden $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt, hat man auch

$$(4') \qquad G_k^*(\tau) = \tfrac{1}{2} \cdot \sum_{ggT(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k}\ ,\ k \geq 4 \ \text{gerade}.$$

Wir wollen eine weitere Darstellung von G_k^* herleiten. Dazu sei

$$(5) \qquad \Gamma_\infty := \{\pm T^n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\} = \{M \in \Gamma\ ;\ c = 0\}.$$

„$M : \Gamma_\infty \setminus \Gamma$“ bedeutet, dass M ein Vertretersystem $\mathcal{V}$ der Rechtsnebenklassen von Γ nach Γ_∞ durchläuft, also

$$\bigcup_{M \in \mathcal{V}} \Gamma_\infty M = \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma_\infty M \neq \Gamma_\infty N \quad \text{für } M, N \in \mathcal{V} \text{ mit } M \neq N.$$

Im Hinblick auf das Ergänzungs–Lemma II.2.1 folgt

$$(6) \qquad G_k^*(\tau) = \sum_{M : \Gamma_\infty \setminus \Gamma} 1|_k M(\tau) = \sum_{M : \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (c\tau + d)^{-k} \quad \text{für gerades } k \geq 4.$$

Man verwendet nun die EULER*sche Formel* (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 11.3.1)

(7) $$2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \cdot B_k \ , \ k \geq 2 \ \text{ gerade},$$

wobei die ersten BERNOULLI–*Zahlen* B_k gegeben sind durch

(8)

k	2	4	6	8	10	12	14
B_k	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$
$-\frac{2k}{B_k}$	-24	240	-504	480	-264	$\frac{65520}{691}$	-24

Aus (3) erhält man dann

(9) $$G_k^*(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \ , \ k \geq 4 \ \text{ gerade.}$$

Das bedeutet insbesondere

(10) $$G_4^*(\tau) = 1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

(11) $$G_6^*(\tau) = 1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Nach diesen Vorbereitungen zeigt sich, dass die Vektorräume der ganzen Modulformen für gerades Gewicht $k \geq 4$ nicht nur aus der Null bestehen:

Satz. *Für gerades* $k \geq 4$ *gilt:*
a) $G_k \in \mathbb{M}_k$.
b) $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k \oplus \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{S}_k$.

Beweis. a) Man verwendet das Konvergenz–Lemmma sowie (2) und (3).
b) Für $f \in \mathbb{M}_k$ ist $f - \alpha_f(0) \cdot G_k^*$ eine Spitzenform. □

Korollar B. *Für gerades* $k \geq 4$ *und* $f \in \mathbb{M}_k$ *gilt*

(12) $$\alpha_f(m) = -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m) + \mathcal{O}\left(m^{k/2}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Man verwendet Teil b) des Satzes, (9) und Teil b) von Satz 1.6. □

Wegen

$$m^r \leq \sigma_r(m) = \sum_{d|m} d^r = m^r \sum_{d|m} d^{-r} \leq \zeta(r) \cdot m^r$$

für $r > 1$ folgt speziell

(13) $\qquad \alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k-1}) \quad$ für alle $\quad f \in \mathbb{M}_k$, $k \geq 4$ gerade,

und diese Abschätzung kann für $f \notin \mathbb{S}_k$ nicht verbessert werden.

Bei den EISENSTEIN–Reihen treten gewisse *Zwangsnullstellen* auf:

Nullstellen–Lemma. a) *Es gilt* $G_k(i) = 0$ *für* $k \not\equiv 0 \,(\bmod\ 4)$, *speziell hat man* $G_6(i) = 0$.
b) *Es gilt* $G_k(\rho) = 0$ *für* $k \not\equiv 0 (\bmod\, 6)$, *speziell* $G_4(\rho) = 0$, $\rho := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.

Beweis. Es gilt $i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $\rho(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ wegen $\rho^2 = \rho - 1$. Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen (1) hat man daher $G_k(i) = i^{-k} \cdot G_k(i)$ und analog auch $G_k(\rho) = \rho^{-k} \cdot G_k(\rho)$. □

Bemerkung. Man kann die Lage der Nullstellen etwas genauer beschreiben. Nach einem Resultat von F.K.C. RANKIN und H.P.F. SWINNERTON–DYER (Bull. Lond. Math. Soc. **2**, 169–170 (1970)) liegen für gerades $k > 2$ die Nullstellen von G_k in $\mathbb{F}$ auf dem Einheitskreis. Man vergleiche dazu auch B. SCHOENEBERG [1974], III.1.6.

2. Die Diskriminante Δ wurde bereits in I.3.4(7) eingeführt und in I.4.3 ausführlicher behandelt. Nach I.4.3(1) ist sie durch

(1) $$\Delta := (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2$$

definiert. Das Transformations–Lemma 1 ergibt sofort

(2) $\qquad \Delta(M\tau) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) \quad$ für alle $\quad \tau \in \mathbb{H} \quad$ und $\quad M \in \Gamma$

und der Satz I.4.3 zeigt, dass Δ eine FOURIER–Entwicklung der Form

(3) $$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \ , \ \tau \in \mathbb{H},$$

besitzt, bei der alle Koeffizienten $\tau(m)$ ganze Zahlen sind und $\tau(1) = 1$ gilt. Eine kurze Tabelle der $\tau(m)$ hatten wir in I.4.3(6) notiert.

Aus (1), (2) und (3) erhält man den wichtigen

Satz. *Es gilt* $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$.

Als wichtigste Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen vermerken wir die Nullstellenfreiheit von Δ nach Korollar I.3.4C sowie die Produktentwicklung nach I.6.5(1). Wir werden diese Tatsachen hier (noch) nicht verwenden, sondern in Satz 4.1 und Korollar 6.2 neue Beweise geben.

Auch hier ist es zweckmäßig, eine normierte Version gesondert zu bezeichnen. Im Hinblick auf (3) definiert man die *normierte Diskriminante* durch

(4) $$\Delta^*(\tau) := (2\pi)^{-12} \cdot \Delta(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}, \ \tau \in \mathbb{H}.$$

Mit 1(4), 1(7) und 1(8) verifiziert man jetzt mühelos

$$(5) \qquad \Delta^* = \frac{1}{1728}(G_4^{*3} - G_6^{*2}).$$

Multipliziert man die FOURIER-Reihen in (5) formal aus, so erscheinen die Koeffizienten in evidenter Weise als ganze Zahlen. Man wird fragen, ob eine „vernünftige" einfache arithmetische Beschreibung der Koeffizienten $\tau(m)$ existiert. Bis heute ist eine solche jedoch nicht gefunden worden. Nach ausführlichen numerischen Berechnungen (über $m = 10^{15}$ hinaus) hat D.H. LEHMER (Duke Math. J. **14**, 429–433 (1947)) die Vermutung ausgesprochen, dass $\tau(m) \neq 0$ für alle m gilt. Bisher ist kein Beweis dieser LEHMER*schen Vermutung* bekannt.

3. Srinivasa RAMANUJAN (1887–1920) wurde in einer südindischen Kleinstadt in der Nähe von Madras geboren. Nach G.H. HARDY war er nur „halb–gebildet" und blieb ohne bessere Ausbildung. Seine wissenschaftliche Entwicklung war aber so einzigartig, dass sie sich nicht mit der eines anderen Mathematikers vergleichen lässt: An Hand von einfachen Lehrbüchern lernte er die Grundlagen der Analysis. Um 1903 begann er, seine Entdeckungen (ohne Beweis) in seinen *Notebooks* aufzuschreiben, bis etwa 1910 lebte er völlig auf sich allein gestellt nur für seine Mathematik.

In einem Brief an G.H. HARDY teilte er diesem einige seiner Ergebnisse mit. Nach und nach übermittelte er HARDY etwa 120 Theoreme über meist formale Identitäten und (teilweise falsche oder unrichtig formulierte) Aussagen zur Primzahltheorie. Ein Teil der von ihm angegebenen Formeln war kompliziert und erschien tiefliegend. Auf Einladung von HARDY besuchte RAMANUJAN von 1914 bis 1917 Cambridge und eine überaus fruchtbare Zusammenarbeit zwischen beiden begann. RAMANUJAN starb im Alter von 32 Jahren in seiner Heimatstadt.

Aufgrund numerischer Rechnungen (er gibt die Werte von $\tau(m)$ für $m \leq 30$ an) vermutete RAMANUJAN, dass die zahlentheoretische Funktion $\tau(m)$ *multiplikativ* ist, d. h., dass

$$\tau(mn) = \tau(m) \cdot \tau(n) \quad \text{für alle teilerfremden } \; m, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Dies wurde kurz darauf von L.J. MORDELL (Proc. Cambridge Phil. Soc. **19**, 117–124 (1920)) bewiesen. Wir geben einen auf E. HECKE zurückgehenden Beweis in Satz IV.1.4.

RAMANUJAN entdeckte bzw. vermutete eine ganze Reihe von Kongruenz–Eigenschaften der Koeffizienten $\tau(m)$. So gilt z. B.

$$\tau(m) \equiv \sigma_{11}(m) \pmod{691} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}$$

(vgl. **4.2**). Er vermutete Kongruenzen der Form

$$\tau(7m+3) \equiv 0 \pmod 7 \quad \text{und} \quad \tau(23m+k) \equiv 0 \pmod{23} \quad \text{für } \; m \in \mathbb{N},$$

wenn k ein so genannter quadratischer Nichtrest modulo 23 ist.

Die spektakulärste von RAMANUJAN ausgesprochene Vermutung trägt noch heute seinen Namen, wenn sie inzwischen auch von P. DELIGNE (Publ. Math. IHES **43**, 273–307 (1974)) als ein Spezialfall einer wesentlich allgemeineren Aussage bewiesen wurde:

RAMANUJAN–Vermutung: *Für alle Primzahlen p gilt*

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}.$$

Die zahlentheoretische Funktion $\tau(m)$ wird oft RAMANUJAN*sche Tau-Funktion* genannt.

Literatur: G. ANDREWS et al: *Ramanujan revisited.* Academic Press, Boston 1988. B. C. BERNDT: *Ramanujan's notebooks I – IV.* Springer-Verlag, New York 1985–1994. B. C. BERNDT, Math. Intel. **10**, No. 3, 24–29 (1988). G.H. HARDY: *Ramanujan.* 3. Aufl., Chelsea, New York 1978. K. G. RAMANATHAN, J. Indian Math. Soc. **51**, 1–25 (1987). S. RAMANUJAN: *Collected Papers.* Chelsea, New York 1962. S. RAMANUJAN: *Notebook I und II*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1957.

4. Die absolute Invariante j ist gemäß I.3.4(8) bzw. I.4.4(1) definiert als Quotient zweier ganzer Modulformen vom Gewicht 12:

(1) $$j := (720\, G_4)^3/\Delta = G_4^{*3}/\Delta^*.$$

j ist sicherlich meromorph (und aus der Nullstellenfreiheit von Δ ergibt sich sogar die Holomorphie) auf $\mathbb{H}$. Das Transformations–Lemma 1 zusammen mit 2(2) führt zu

(2) $$j(M\tau) = j(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma \text{ und } \tau \in \mathbb{H}.$$

Wie in Satz I.4.4A ausgeführt wurde, erhält man aus (1) eine FOURIER–Entwicklung der Form

(3) $$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m=0}^{\infty} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau}\ ,\ \tau \in \mathbb{H},$$

mit $j_m \in \mathbb{Z}$. Zusammengefasst bekommt man den

Satz. *j ist eine Modulfunktion, d. h., es gilt*

$$j \in \mathbb{K} = \mathbb{V}_0.$$

Das Nullstellen–Lemma 1 ergibt noch

(4) $$j(i) = 12^3 = 1728\ ,\ j(\rho) = 0.$$

Nach Satz I.6.6 sind die j_m sogar positive ganze Zahlen. Wir geben eine kurze Tabelle: