Kapitel II.

Geometrie in der oberen Halbebene und die Operation der Modulgruppe

Einleitung

1. Vorbemerkung. Die im 1. Kapitel behandelten elliptischen Funktionen sind definitionsgemäß genau die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen, die unter einer Klasse von ausgezeichneten Gruppen biholomorpher Selbstabbildungen von $\mathbb{C}$ invariant sind: Es handelt sich dabei um die Gruppen der Translationen $z \mapsto z + \omega$, $\omega \in \Omega$, wobei Ω ein gegebenes Gitter in $\mathbb{C}$ ist. Im Verlauf der Überlegungen war es dabei häufig zweckmäßig, das Gitter Ω in der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im} \tau > 0$$

anzunehmen. Nach dem Basis–Lemma I.1.6 und den Überlegungen in I.4.1 ist hierbei τ nur bis auf eine Abbildung der Gestalt

$$\tau \mapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z}) \tag{1}$$

bestimmt. Dies ist die historische Grundlage für das Interesse, das diejenigen Funktionen seit den Anfängen der Theorie elliptischer Funktionen gefunden haben, die unter den Substitutionen (1) invariant sind oder wenigstens ein übersichtliches Verhalten zeigen.

2. Modulsubstitutionen. Im Zentrum aller folgenden Überlegungen steht daher die so genannte *Modulgruppe*

$$\Gamma := SL(2;\mathbb{Z}) = \{M \in \operatorname{Mat}(2;\mathbb{Z})\ ;\ \det M = 1\}.$$

Die Gruppe Γ operiert als Gruppe von biholomorphen Automorphismen 1(1), den so genannten *Modulsubstitutionen*, auf der *oberen Halbebene*

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im} \tau > 0\}.$$

Bevor in Kapitel III auf Funktionen eingegangen wird, die unter Modulsubstitutionen invariant oder wenigstens „relativ invariant“ sind, sollen in diesem Kapitel die geometrischen Grundlagen für solche Untersuchungen dargestellt werden.

Es handelt sich dabei einmal um eine Erinnerung an die grundlegenden Eigenschaften der Abbildungen 1(1), wenn man für M *reelle* Matrizen der Determinante 1, also $M \in SL(2;\mathbb{R})$, zulässt. Zum anderen wird in §2 die Geometrie der Modulsubstitutionen untersucht und insbesondere ein kanonischer exakter Fundamentalbereich von Γ in $\mathbb{H}$ konstruiert. Die folgenden Paragrafen dieses Kapitels können bei einer ersten Lektüre überschlagen werden.

3. Die absolute Invariante und der Modulraum. In I.3.4(8) hatten wir jedem Gitter Ω mit Hilfe der WEIERSTRASS–Invarianten g_2 und g_3 die so genannte absolute Invariante

$$j = j(\Omega) := (12g_2)^3/(g_2^3 - 27g_3^2)$$

zugeordnet und in Satz I.4.1 gesehen, dass

$$j(\Omega') = j(\Omega) \quad \text{gleichwertig ist mit} \quad \Omega' = \lambda\Omega \quad \text{für ein} \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C}.$$

Das Bild von j wird daher schon auf den Gittern der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

angenommen. Mit der Abkürzung $j(\tau) := j(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$ zeigt 1(1), dass j unter allen Modulsubstitutionen invariant ist. Dies war bereits in I.4.4 dargelegt worden. In Satz I.4.4B wurde gezeigt, dass auch die Umkehrung hiervon gültig ist:

$$\text{Gilt} \quad j(\tau') = j(\tau) \quad \text{für } \tau', \tau \in \mathbb{H}, \text{ dann gibt es ein } M \in \Gamma \text{ mit} \quad \tau' = M\tau.$$

Führt man daher den Raum

$$\Gamma\backslash\mathbb{H} := \{\Gamma\tau \; ; \; \tau \in \mathbb{H}\} \quad \text{mit} \quad \Gamma\tau := \{M\tau \; ; \; M \in \Gamma\}$$

aller *Bahnen* von Γ ein, so induziert j ein Bijektion

$$j^* : \Gamma\backslash\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}\;, \; j^*(\Gamma\tau) := j(\tau).$$

In diesem Sinne ist $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ ein *Modulraum* für die Funktion j. Eine erste Hauptaufgabe besteht daher darin, in der oberen Halbebene eine einfache Realisierung dieses Modulraumes zu finden. Dies geschieht durch die Angabe eines exakten Fundamentalbereiches von Γ. Man vergleiche **2.4**.

4. Verallgemeinerungen. Die obere Halbebene mit ihrer besonderen Geometrie einerseits und die Gruppe der Modulsubstitutionen andererseits können auf viele Weisen verallgemeinert werden: Man kann bei $\mathbb{H}$ bleiben und Untergruppen von Γ studieren (§3) oder allgemeiner so genannte diskontinuierliche Untergruppen von $SL(2;\mathbb{R})$ betrachten (§4). Andererseits kann man aber auch von der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ zu höheren Dimensionen übergehen und dabei den

Schwerpunkt legen auf

a) Holomorphie der Abbildungen oder
b) Birationalität der Abbildungen oder
c) Erhalt metrischer Eigenschaften

usw. Keine dieser Verallgemeinerungen wird hier besprochen. Auf einige der bei Verallgemeinerungen wichtigen Aspekte wird jedoch in Abschnitten eingegangen, die bei einer ersten Lektüre überschlagen werden können.

§1. Die obere Halbebene

In diesem Paragrafen wird die obere Halbebene $\mathbb{H}$ in $\mathbb{C}$ genauer untersucht. Die Automorphismengruppe von $\mathbb{H}$ wird beschrieben. Dann wird die hyperbolische Geometrie entwickelt.

1. Gebrochen lineare Transformationen. Wir schreiben 2×2 Matrizen meist in der Form

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und benutzen wie üblich für *Determinante* und *Spur* die Abkürzungen

$$\det M := ad - bc\ ,\ \operatorname{Sp} M := a + d\ ,$$

sowie

$$M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad M^\sharp = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

für die *transponierte* bzw. *adjungierte* Matrix. Es bezeichne $GL(2;\mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren komplexen 2×2 Matrizen,

$$GL(2;\mathbb{C}) := \{M \in \operatorname{Mat}(2;\mathbb{C})\ ;\ \det M \neq 0\}\ .$$

Mit E wird die Einheitsmatrix abgekürzt. Bekanntlich wird die inverse Matrix zu $M \in GL(2;\mathbb{C})$ gegeben durch

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, M^\sharp = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Für $M \in GL(2;\mathbb{C})$ ist unter offensichtlichen Voraussetzungen an $\tau \in \mathbb{C}$ die komplexe Zahl

(1) $$M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

wohldefiniert. Damit wird durch

(2) $$\Phi_M : \tau \mapsto M\tau$$

eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ gegeben, die auch als *gebrochen lineare Transformation* oder als MÖBIUS–*Transformation* bezeichnet wird. Für $c = 0$ ist Φ_M eine ganze Funktion. Im Fall $c \neq 0$ hat Φ_M genau einen Pol und zwar von 1. Ordnung bei $\tau = -d/c$.

Warnung: Die Schreibweise $M\tau$ darf nicht mit der skalaren Multiplikation τM von τ mit M verwechselt werden! Wenn Missverständnisse zu befürchten sind, schreibt man auch $M\langle\,\tau\rangle$ anstelle von $M\tau$.

Aus (1) folgert man für $L, M \in GL(2;\mathbb{C})$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ wieder unter offensichtlichen Voraussetzungen an τ und τ':

$$E\tau = \tau, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_E = \mathrm{id}, \tag{3}$$

$$(\lambda M)\tau = M\tau\ , \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{\lambda M} = \Phi_M, \tag{4}$$

$$(LM)\tau = L\langle M\tau\rangle, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_{LM} = \Phi_L \circ \Phi_M, \tag{5}$$

$$M\tau' - M\tau = \frac{\det M}{(c\tau' + d)(c\tau + d)} \cdot (\tau' - \tau) \tag{6}$$

Schließlich dividiert man (6) durch $\tau' - \tau$ und erhält für $\tau' \to \tau$

$$\Phi'_M(\tau) = \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{\det M}{(c\tau + d)^2} \tag{7}$$

Als Umkehrung von (4) hat man die

Proposition. *Für $L, M \in GL(2;\mathbb{C})$ sind äquivalent:*
(i) $M\tau = L\tau$ *gilt für wenigstens drei verschiedene* $\tau \in \mathbb{C}$.
(ii) *Es gibt* $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $M = \lambda L$.

Beweis. Wegen (5) und (3) ist $M\tau = L\tau$ mit $(L^{-1}M)\tau = \tau$ äquivalent. Man kann daher in beiden Fällen ohne Einschränkung $L = E$ annehmen. Da sich $M\tau = \tau$ jetzt als

$$c\tau^2 + (d - a)\tau - b = 0$$

schreibt, folgt die Behauptung. □

Jeder Kreis in $\mathbb{C}$ kann durch eine Gleichung der Form

$$A\tau\overline{\tau} + B\tau + \overline{B\tau} + C = 0 \quad \text{mit} \quad A, C \in \mathbb{R}\ ,\ A \neq 0 \text{ und } B \in \mathbb{C} \tag{8}$$

beschrieben werden. Genauer gilt dann $|B|^2 > AC$ und der Mittelpunkt m bzw. der Radius $r > 0$ werden gegeben durch

$$m = -\overline{B}/A \quad \text{bzw.} \quad r^2 = (|B|^2 - AC)/A^2. \tag{9}$$

Umgekehrt beschreibt (8) im Fall $A \neq 0$ und $|B|^2 > AC$ stets einen Kreis. Im Fall $A = 0$, $B \neq 0$ erhält man durch (8) genau alle Geraden in $\mathbb{C}$.

Bemerkungen. a) Die für 2×2 Matrizen M über einem beliebigen Körper gültige Identität $M^t JM = \det M \cdot J$ zeigt, dass man für die Modulgruppe auch

$$\Gamma = \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\ ;\ M^t JM = J\}$$

schreiben kann.
b) Im Anschluss an Korollar B kann man zeigen, dass Γ als die Gruppe mit zwei Erzeugenden J und U und den definierenden Relationen $J^4 = U^3 = E$ sowie $J^2U = UJ^2$ beschrieben werden kann. Man vergleiche H. MAASS [1983], 54–55.
c) Die Gruppe $PSL(2;\mathbb{Z}) := SL(2;\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ ist wegen Proposition 1.1 und Satz 1.3 kanonisch isomorph zur Gruppe der Modulsubstitutionen. Sie wird erzeugt von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto J\tau = -1/\tau$ und $\tau \mapsto U\tau = 1 - 1/\tau$ der Ordnung 2 und 3. Also ist $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ das freie Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2 und 3.
d) Die Bezeichnung der Matrizen (1) mit J bzw. T (wegen „Involution“ und „Translation“) ist in der Literatur keineswegs verbindlich geregelt. H. PETERSSON und seine Schüler verwenden die Bezeichnung T bzw. U.

2. Der exakte Fundamentalbereich $\mathbb{F}$. Man definiere

(1) $\mathbb{F} := \left\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau \le \frac{1}{2}\ ,\ |\tau| \ge 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < 0\right\}$

und veranschauliche sich $\mathbb{F}$ an der nebenstehenden Figur. Offenbar wird $\mathbb{F}$ von Teilen der Geraden $\mathrm{Re}\,\tau = \pm\frac{1}{2}$ und einem Bogen des Einheitskreises, also von Teilen von Orthogonalkreisen berandet.

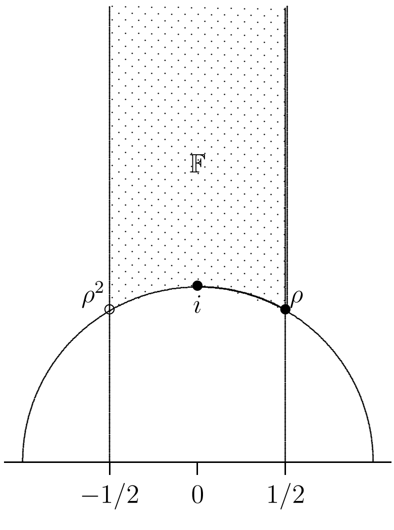

Abb. 16: Der exakte Fundamentalbereich

$$\overline{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| \le \tfrac{1}{2}, |\tau| \ge 1\},$$
$$\mathring{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| < \tfrac{1}{2}, |\tau| > 1\}$$

bezeichne die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern von $\mathbb{F}$. Die Randpunkte i und

(2) $\rho := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ mit $\rho^3 = -1$

gehören zu $\mathbb{F}$, während

$$\rho^2 = \rho - 1 = -\overline{\rho} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

zwar zu $\overline{\mathbb{F}}$, aber nicht zu $\mathbb{F}$ gehört. Offenbar gilt

(3) $$\mathrm{Im}\ \tau \ge \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{für alle } \tau \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Mit den Bezeichnungen 1(1) und 1(6) erhält man den

§2. Beispiele

1. Die Eisenstein–Reihen. Die klassischen Beispiele für ganze Modulformen sind die Eisenstein–*Reihen*

$$G_k(\tau) := \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-k} \quad \text{für } k \geq 3 \text{ ganz} \tag{1}$$

gemäß I.1.9(2) bzw. I.3.2(1). Dabei soll der Strich am Summenzeichen bedeuten, dass die Summe über alle Paare $(m, n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0, 0)$ zu erstrecken ist. Obwohl die wesentlichen Eigenschaften der G_k bereits in I.§4 hergeleitet wurden, sollen hier einige davon mit anderen Beweisen neu begründet werden:

Proposition. *Zu jedem Kompaktum $\mathcal{K}$ in $\mathbb{H}$ gibt es positive Konstanten γ und δ mit*

$$\gamma \cdot |mi + n| \leq |m\tau + n| \leq \delta \cdot |mi + n|$$

für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und alle $\tau \in \mathcal{K}$.

Beweis. Aus Homogenitätsgründen darf man $m^2 + n^2 = 1$, also $|mi + n| = 1$ voraussetzen. Dann nimmt aber die stetige Funktion

$$(\tau,\, m,\, n) \mapsto |m\tau + n|$$

auf der kompakten Menge $\mathcal{K} \times \{(m, n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ m^2 + n^2 = 1\}$ ein Minimum γ und ein Maximum δ an. Da $\operatorname{Im}\tau$ für $\tau \in \mathcal{K}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, gilt $\gamma > 0$. □

In Analogie zu I.1.9 erhält man nun das

Konvergenz–Lemma. *Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ ist G_k absolut und kompakt–gleichmäßig konvergent. Damit ist G_k eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$.*

Beweis. Nach der Proposition braucht nur die Konvergenz von

$$\sum_{m,n}{}' (m^2 + n^2)^{-\alpha} \quad \text{für } \alpha > 1$$

bewiesen zu werden. Den wohl einfachsten Beweis hierfür findet man bereits bei Weierstrass (*Math. Werke V*, 117): Mit Hilfe der Ungleichung $m^2+n^2 \geq |mn|$ erhält man

$$\sum_{E} (m^2 + n^2)^{-\alpha} \leq 4\sum_{m\geq 1} m^{-2\alpha} + 4\Big(\sum_{m\geq 1} m^{-\alpha}\Big)^2 \leq 4(\zeta(2\alpha) + \zeta^2(\alpha)) < \infty$$

für $\alpha > 1$ und jede endliche Teilmenge E von $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$. □

ASYMPTOTIC FORMULAS FOR MODULAR FORMS AND RELATED FUNCTIONS

KATHRIN BRINGMANN

1. Introduction

In this note, we aim to describe how "modularity" can be useful for studying the asymptotic behavior of arithmetically interesting functions. We do not try to state a complete description about what is known but rather work with examples to give an idea about basic concepts.

Let us recall the objects of interest. In the words of Mazur,

"Modular forms are functions on the complex plane that are inordinately symmetric. They satisfy so many symmetries that their mere existence seem like accidents. But they do exist."

Modular forms alluded to in this quote are meromorphic functions on the complex upper half plane $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ that satisfy (if f is modular of weight $k \in \mathbb{Z}$ for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$):

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k f(\tau) \qquad \forall \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) := \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}); ad-bc=1\right\}. \tag{1.1}$$

Moreover, as a technical growth condition, one requires the function to be "meromorphic at the cusps". Note that the transformation law can be generalized to subgroups, to include multipliers or half-integral weight. We do not state the specific shape of these transformations here but we will later treat special cases, for example in Theorem 3.14.

An important property of modular forms is that they have Fourier expansions of the shape $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(n) e^{2\pi i n\tau}$. This follows from the transformation law (1.1), the fact that $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, and the meromorphicity on $\mathbb{H}$. Meromorphicity at the cusps now says that $a(n) \neq 0$ for only finitely many

The research of the author was supported by the Alfried Krupp Prize for Young University Teachers of the Krupp Foundation.

$n < 0$. The coefficients $a(n)$ often encode interesting arithmetic information such as the number of representations of n by a (positive definite) quadratic form, just to give one of the numerous examples.

Modular forms play an important role in many areas like physics, representation theory, the theory of elliptic curves (in particular the proof of Fermat's Last Theorem), quadratic forms, and partitions, just to mention a few. Establishing modularity is of importance because it provides powerful machineries which can be employed to prove important results. For example, identities may be reduced to a finite calculation of Fourier coefficients (Sturm's Theorem), asymptotic formulas for Fourier coefficients can be obtained by Tauberian Theorems or the Circle Method, and congruences may be proven by employing Serre's theory of p-adic modular forms. In this note we are particularly interested in asymptotic and exact formulas for Fourier coefficients of various modular q-series. In Section 2 we consider holomorphic modular forms, then in Section 3 allow growth in the cusps, in Section 4 turn to mock modular forms, and finally treat mixed mock modular forms in Section 5.

2. Classical modular forms

In this section we restrict, for simplicity, to forms of even integral weight k for $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. For basic facts on modular forms and most of the details skipped in this section, we refer the reader to [31].

We call a modular form a *holomorphic modular form* if it is holomorphic on the upper half-plane and bounded in ∞. The space of holomorphic modular forms of weight k is denoted by M_k. If a holomorphic modular form exponentially decays towards ∞ it is called a *cusp form*. The associated space is denoted by S_k. Special holomorphic modular forms that are not cusp forms are given by the classical Eisenstein series and they have very simple explicit Fourier coefficients.

Definition. Formally define for $k \in \mathbb{N}$ the *Eisenstein series*

$$G_k(\tau) := \sum_{m,n\in\mathbb{Z}}{}' (m\tau + n)^{-k},$$

where the sum runs through all $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. We note that

$$G_{2k+1}(\tau) \equiv 0.$$

Theorem 2.1. *For $k \geq 4$ even, we have that $G_k \in M_k$.*

Proof. (sketch)

Step 1: Prove compact convergence.
Step 2: Apply modular transformations and reorder.

$\square$

Remark. We also require a normalized version of the Eisenstein series. For this set $\Gamma_\infty := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right); n \in \mathbb{Z}\}$ and for $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), k \in \mathbb{Z}$, and $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ we let the *Petersson slash operator* be given by

$$f|_k M(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

Define for $k \geq 4$ an even integer

$$E_k(\tau) := \frac{1}{2} \sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} 1|_k M(\tau),$$

where the sum runs through a complete set of representatives of right cosets of Γ_∞ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. We have that

$$E_k(\tau) = \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(\tau),$$

where $\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ ($\mathrm{Re}(s) > 1$) denotes the *Riemann zeta function*. Indeed, it is not hard to see that a set of representatives of $\Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ may be given by

$$\left\{ \begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); (c, d) = 1 \right\}.$$

Thus

$$\begin{aligned} E_k(\tau) &= \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} (c\tau + d)^{-k} = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{r \geq 1} r^{-k} \sum_{(c,d)=1} (c\tau + d)^{-k} \\ &= \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ r \in \mathbb{N}}} (cr\tau + dr)^{-k}. \end{aligned}$$

Now (cr, dr) runs through $\mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ if r runs through $\mathbb{N}$ and (c, d) through $\mathbb{Z}^2$ under the restriction that $(c, d) = 1$. This gives the claim.

We next turn to computing the Fourier expansion of the Eisenstein series.

Theorem 2.2. *We have the Fourier expansion for $k \geq 4$ even*

$$E_k(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau},$$

where $\sigma_\ell(n) := \sum_{d|n} d^\ell$ *and* B_k *is the kth Bernoulli number given by the generating function*

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Proof. We instead compute the Fourier expansion of G_k and then use that for k even

$$\zeta(k) = (-1)^{\frac{k}{2}+1}\frac{(2\pi)^k B_k}{2k!}.$$

Due to the absolute convergence of the Eisenstein series we may reorder

$$\begin{aligned}(2.1)\quad G_k(\tau) = {\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}}'(m\tau+n)^{-k} &= \sum_{n\neq 0} n^{-k} + \sum_{m\neq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-k} \\ &= 2\zeta(k) + 2\sum_{m>0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(m\tau+n)^{-k}.\end{aligned}$$

Now it is well-known by the Lipschitz summation formula (cf. pp. 65–72 of [30]) that

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{n\geq 1} n^{k-1}e^{2\pi i n\tau}.$$

This gives that the second term in (2.1) equals

$$\frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m\geq 1}\sum_{d\geq 1} d^{k-1}e^{2\pi i m d\tau} = \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{m\geq 1}\sum_{d|m} d^{k-1}e^{2\pi i m\tau},$$

which gives the claim. □

Examples. We have the following special cases

$$\begin{aligned}E_4(\tau) &= 1 + 240\sum_{n\geq 1}\sigma_3(n)e^{2\pi i n\tau},\\ E_6(\tau) &= 1 - 504\sum_{n\geq 1}\sigma_5(n)e^{2\pi i n\tau},\\ E_8(\tau) &= 1 + 480\sum_{n\geq 1}\sigma_7(n)e^{2\pi i n\tau}.\end{aligned}$$

We next turn to bounding Fourier coefficients of holomorphic modular forms. For this we split the space M_k into an Eisenstein series part and a cuspidal part.

Theorem 2.3. *Assume that* $k \geq 4$ *is even. Then we have that*

$$M_k = \mathbb{C}E_k \oplus S_k.$$

Proof. Assume $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a(n)e^{2\pi in\tau} \in M_k$. Then

$$f - a(0)E_k \in S_k.$$

$\square$

Since the coefficients of the Eisenstein series part were given explicitly in Theorem 2.2, we next turn to bounding coefficients of cups forms.

Theorem 2.4. *(Hecke bound) For $f(\tau) = \sum_{n\geq 1} a(n)e^{2\pi in\tau} \in S_k$ with $k > 0$, we have*

$$a(n) = O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

Proof. It is not hard to see that the function

$$\widetilde{f}(\tau) := \mathrm{Im}(\tau)^{\frac{k}{2}}|f(\tau)|$$

is bounded on $\mathbb{H}$. Indeed one can show that $\widetilde{f}$ is invariant under $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ and one may then bound $\widetilde{f}$ for sufficiently large imaginary part. Using Cauchy's Theorem, we may write for $n \geq 1$

$$a(n) = e^{2\pi ny} \int_0^1 f(x+iy)e^{-2\pi inx}dx,$$

where $y > 0$ may be chosen arbitrary. This yields that

$$|a(n)| \leq y^{-\frac{k}{2}} e^{2\pi ny} \int_0^1 \widetilde{f}(x+iy)dx \leq cy^{-\frac{k}{2}}e^{2\pi ny}$$

for some constant $c > 0$ (independent of y). Picking $y = \frac{1}{n}$ gives

$$|a(n)| \leq cn^{\frac{k}{2}}e^{2\pi} = O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

$\square$

Remark. The Ramanujan-Petersson Conjecture predicts that for $f \in S_k$ we have for any $\varepsilon > 0$ the (optimal) estimate

$$a(n) \ll_{\varepsilon,f} n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}.$$

For integral weight $k \geq 2$ this conjecture was proven by Deligne using highly advanced techniques from algebraic geometry. His method begins with the fact that the vector space of cusp forms has a basis of common eigenfunctions of the so-called Hecke algebra and that the Fourier coefficients of these forms coincide with the eigenvalues.

Corollary 2.5. *Assume $k \geq 4$ is even and $f(\tau) = \sum_{n\geq 0} a(n)e^{2\pi i n\tau} \in M_k$. Then*

$$a(n) = -a(0)\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n) + O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

Proof. The claim follows directly by combining Theorem 2.3 and Theorem 2.4. □

Remark. We have that

$$n^r \leq \sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r = n^r \sum_{d|n} d^{-r} \leq n^r \sum_{d\geq 1} d^{-r} = \zeta(r)n^r.$$

In particular we have for $k \geq 4$ that for $f \in M_k$

$$a(n) = O\left(n^{k-1}\right)$$

and if $f \notin S_k$, this bound cannot be improved.

We next turn to defining explicit cusp forms whose construction generalizes that of Eisenstein series.

Definition. For $k \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{N}_0$, formally define the Poincaré series

$$P_{k,n}(\tau) := \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i n\tau}\Big|_k M.$$

Note that

$$P_{k,0}(\tau) = 2E_k(\tau).$$

A calculation similar to the proof of Theorem 2.1 gives the modularity of these functions.

Theorem 2.6. *For $k \geq 3$ the Poincaré series $P_{k,n}$ converges uniformly on every vertical strip in $\mathbb{H}$. In particular $P_{k,n} \in M_k$ and for $n > 0$ we have $P_{k,n} \in S_k$.*

Poincaré series turn out to be useful as they have explicitely computable Fourier expansions and integrating cusp forms against them recovers Fourier coefficients of these forms.

To precisely state this result, we require the Petersson inner product. To define this, note that for $f, g \in M_k$

$$d\mu := \frac{dxdy}{y^2},$$

$$f(\tau)\overline{g(\tau)}y^k$$

are invariant under $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Definition. A subset $\mathcal{F} \subset \mathbb{H}$ is called *a fundamental domain* of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ if the following hold:

(i) $\mathcal{F}$ is closed.

(ii) For every $\tau \in \mathbb{H}$ there exists $M \in \mathrm{SL}_2(Z)$ such that $M\tau \in \mathcal{F}$.

(iii) If τ and $M\tau$ ($M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) are in the interior of $\mathcal{F}$, then $M = \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

We also require the following explicit fundamental domain.

Theorem 2.7. *The following is a fundamental domain of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$*:*

$$\mathcal{F} := \left\{ \tau \in \mathbb{H}; |\tau| \geq 1, |\mathrm{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Remark. Note that if $\tau = x + iy \in \mathcal{F}$, then $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Definition. For $f \in M_k$ and $g \in S_k$, formally define the *Petersson inner product*

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)} y^k d\mu. \tag{2.2}$$

Later we also require a regularized version of this inner product. To give this, denote for $T > 0$

$$\mathcal{F}_T := \left\{ \tau \in \mathbb{H}; |x| \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1, y \leq T \right\}.$$

Following [7], we define the regularized inner product $\langle f, g \rangle^{\mathrm{reg}}$ of forms f, g which transform like modular forms of weight k but may grow at the cusps. To be more precise we let $\langle f, g \rangle^{\mathrm{reg}}$ be the constant term in the Laurent expansion at $s = 0$ of the meromorphic continuation in s of

$$\lim_{T \to \infty} \int_{\mathcal{F}_T} g(\tau)\overline{f(\tau)} y^{k-s} d\mu,$$

if it exists. Note that if $f \in M_k$ and g has vanishing constant term, then we have

$$\langle f, g \rangle^{\mathrm{reg}} = \lim_{T \to \infty} \int_{\mathcal{F}_T} g(\tau)\overline{f(\tau)} y^k d\mu. \tag{2.3}$$

The following theorem may be easily verified.

Theorem 2.8. *The integral* (2.2) *is absolutely convergent and the following conditions hold:*

(i) $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$;
(ii) $\langle f,g\rangle$ *is* $\mathbb{C}$*-linear in* f;
(iii) $\langle f,f\rangle\geq 0$ *and moreover* $\langle f,f\rangle=0\Leftrightarrow f\equiv 0$.

In particular, integrating against Poincaré series yields the Fourier coefficients of cusp forms.

Theorem 2.9. *(Petersson coefficient formula) For* $f(\tau)=\sum_{m\geq 1}a(m)e^{2\pi i m\tau}\in S_k$*, we have*

$$\langle f,P_{k,n}\rangle=\begin{cases}0 & \text{for } n=0,\\ \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}}a(n) & \text{for } n\geq 1.\end{cases}$$

In particular $E_k\perp S_k$ *with respect to the Petersson scalar product.*

Proof. We only argue formally and ignore questions of convergence. We have

$$\langle f,P_{k,n}\rangle=\int_{\mathcal{F}}f(\tau)\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\overline{e^{2\pi i n\tau}\big|_k M}y^k d\mu \tag{2.4}$$

$$=\sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}\int_{\mathcal{F}}f\big|_k M(\tau)\overline{e^{2\pi i n\tau}\big|_k M}y^k d\mu=\int_{\bigcup_{M\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}M\mathcal{F}}f(\tau)\overline{e^{2\pi i n\tau}}y^k d\mu.$$

Note that $\cup_{M\in\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}M\mathcal{F}$ is a fundamental domain for the action of Γ_∞ on $\mathbb{H}$ and that $f(\tau)\overline{e^{2\pi i n\tau}}y^k$ is invariant under the action of Γ_∞. Thus we may change $\cup_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}M\mathcal{F}$ into

$$\{\tau=x+iy; 0\leq x\leq 1, y>0\}.$$

This gives that (2.4) equals

$$\int_0^\infty\int_0^1 f(\tau)e^{-2\pi i n\overline{\tau}}y^{k-2}dxdy=\sum_{m\geq 1}a(m)\int_0^\infty e^{-2\pi(n+m)y}y^{k-2}dy\int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}dx.$$

Now the claim follows by using that

$$\int_0^1 e^{2\pi i\ell x}dx=\begin{cases}1 & \text{if } \ell=0,\\ 0 & \text{otherwise},\end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{k-2}dt=(k-2)!.$$

□

To show that the Poincaré series constitute a basis of S_k, we first require the Valence formula (see [31] for a proof).

Theorem 2.10. *If $f \not\equiv 0$ is a meromorphic modular form of weight $k \in \mathbb{Z}$, we have with $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$*

$$\operatorname{ord}(f;\infty) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(f;i) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(f;\rho) + \sum_{\substack{z \in \Gamma\backslash\mathbb{H} \\ z \not\equiv i,\rho \pmod{\Gamma}}} \operatorname{ord}(f;z) = \frac{k}{12},$$

where $\operatorname{ord}(f;\infty) = n_0$ *if* $f(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)q^n$ *with* $a(n_0) \neq 0$.

One can conclude from Theorem 2.10 the following dimension formulas, the proof is omitted here.

Corollary 2.11. *For $k \in \mathbb{N}_0$, we have*

$$\dim M_{2k} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 & \textit{if } k \not\equiv 1 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \textit{if } k \equiv 1 \pmod{6}, \end{cases}$$

$$\dim S_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \textit{if } k \not\equiv 1 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor - 1 & \textit{if } k \equiv 1 \pmod{6}, k \geq 7, \\ 0 & \textit{if } k = 1. \end{cases}$$

This easily gives the basis property of the Poincaré series.

Corollary 2.12. *(Completeness theorem) Let $k \geq 4$ even and $d_k := \dim(S_k)$. Then a basis of S_k is given by*

$$\{P_{k,n}; n = 1, \ldots, d_k\}.$$

In particular, M_k has a basis consisting of Eisenstein series and Poincaré series.

Proof. Set $S := \operatorname{span}\{P_{k,1}, \ldots, P_{k,d_k}\} \subset S_k$ and $f \in S_k$ such that $f \perp S$ with respect to the Petersson inner product. Then f has a Fourier expansion of the shape $f(\tau) = \sum_{m \geq d_k+1} a(m)e^{2\pi i m\tau}$. From Corollary 2.11 we know the precise shape of d_k, yielding a contradiction to Theorem 2.10. To be more precise, we have for $k \not\equiv 2 \pmod{12}$

$$d_k + 1 = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 > \frac{k}{12} = \operatorname{ord}(f;\infty) + \sum_{z \in \Gamma\backslash\mathbb{H}} \operatorname{ord}(f;z) \geq d_k + 1.$$

For $k \equiv 2 \pmod{12}$, we get

$$\frac{k}{12} = d_k + 1 + \frac{1}{6}.$$