Bemerkungen. a) Die für 2×2 Matrizen M über einem beliebigen Körper gültige Identität $M^t JM = \det M \cdot J$ zeigt, dass man für die Modulgruppe auch

$$\Gamma = \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\ ;\ M^t JM = J\}$$

schreiben kann.
b) Im Anschluss an Korollar B kann man zeigen, dass Γ als die Gruppe mit zwei Erzeugenden J und U und den definierenden Relationen $J^4 = U^3 = E$ sowie $J^2U = UJ^2$ beschrieben werden kann. Man vergleiche H. Maass [1983], 54–55.
c) Die Gruppe $PSL(2;\mathbb{Z}) := SL(2;\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ ist wegen Proposition 1.1 und Satz 1.3 kanonisch isomorph zur Gruppe der Modulsubstitutionen. Sie wird erzeugt von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto J\tau = -1/\tau$ und $\tau \mapsto U\tau = 1 - 1/\tau$ der Ordnung 2 und 3. Also ist $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ das freie Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2 und 3.
d) Die Bezeichnung der Matrizen (1) mit J bzw. T (wegen „Involution" und „Translation") ist in der Literatur keineswegs verbindlich geregelt. H. Petersson und seine Schüler verwenden die Bezeichnung T bzw. U.

2. Der exakte Fundamentalbereich $\mathbb{F}$. Man definiere

(1) $$\mathbb{F} := \left\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ -\tfrac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau \le \tfrac{1}{2}\ ,\ |\tau| \ge 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\tfrac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < 0\right\}$$

und veranschauliche sich $\mathbb{F}$ an der nebenstehenden Figur. Offenbar wird $\mathbb{F}$ von Teilen der Geraden $\mathrm{Re}\,\tau = \pm\frac{1}{2}$ und einem Bogen des Einheitskreises, also von Teilen von Orthogonalkreisen berandet.

$$\overline{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| \le \tfrac{1}{2}, |\tau| \ge 1\},$$
$$\mathring{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| < \tfrac{1}{2}, |\tau| > 1\}$$

bezeichne die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern von $\mathbb{F}$. Die Randpunkte i und

(2) $$\rho := \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3} \quad \text{mit} \quad \rho^3 = -1$$

gehören zu $\mathbb{F}$, während

$$\rho^2 = \rho - 1 = -\overline{\rho} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

zwar zu $\overline{\mathbb{F}}$, aber nicht zu $\mathbb{F}$ gehört. Offenbar gilt

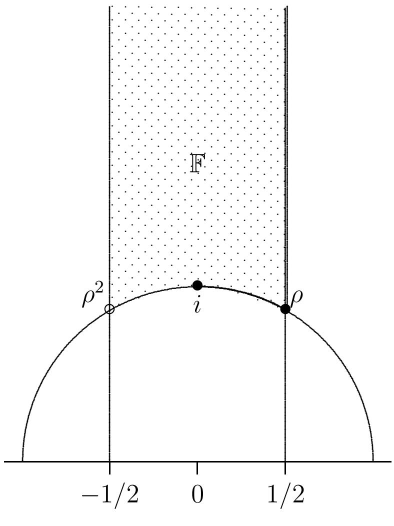

Abb. 16: Der exakte Fundamentalbereich

(3) $$\mathrm{Im}\ \tau \ge \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{für alle } \tau \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Mit den Bezeichnungen 1(1) und 1(6) erhält man den

10) Aus $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ folgt $\mathbb{S}_k = \Delta \cdot \mathbb{M}_{k-12}$ für gerades $k \geq 0$.
11) $\mathbb{S}_k = \{0\}$ für $k < 12$, $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}, \mathbb{M}_2 = \{0\}$ und $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k = \mathbb{C} \cdot G_k^*$ für $k = 4, 6, 8, 10$.
12) Für gerades $k \geq 0$ gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k = \begin{cases} [\frac{k}{12}], & \text{falls} \quad k \equiv 2 \pmod{12}, \\ [\frac{k}{12}] + 1, & \text{falls} \quad k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

§3. Die Gewichtsformel

1. Ordnungen. Es sei $f \neq 0$ eine Modulform vom Gewicht k im Sinne von **1.3**, also $f \in \mathbb{V}_k$. Für $w \in \mathbb{H}$ existiert dann eine Laurent–Entwicklung

$$(1) \qquad f(\tau) = \sum_{m \geq r} \gamma(m) \cdot (\tau - w)^m \ , \ \gamma(r) \neq 0,$$

die in einer punktierten Umgebung von w absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert. Wie in I.2.1 definiert man die *Ordnung* von f in w durch

$$(2) \qquad \operatorname{ord}_w f := r.$$

Die Funktion f hat also in w eine Nullstelle bzw. einen Pol, je nachdem ob (2) positiv oder negativ ist.

Proposition. *Ist $f \not\equiv 0$ meromorph auf $\mathbb{H}$, so gilt*

$$\operatorname{ord}_z f|_k M = \operatorname{ord}_{Mz} f \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{H} \ \ \textit{und} \ \ M \in SL(2;\mathbb{R}).$$

Insbesondere hat man für $0 \neq f \in \mathbb{V}_k$

$$\operatorname{ord}_z f = \operatorname{ord}_{Mz} f \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{H} \ \ \textit{und} \ \ M \in \Gamma.$$

Beweis. Bekanntlich gilt (2), wenn es eine in w holomorphe Funktion g gibt mit

$$f(\tau) = (\tau - w)^r \cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(w) \neq 0.$$

Für $M \in \Gamma$ und $z := M^{-1}w$ folgt dann nach 1.1(1) und II.1.1(6)

$$\begin{aligned} (f|_k M)(\tau) &= (c\tau + d)^{-k} \cdot (M\tau - Mz)^r \cdot g(M\tau) = (\tau - z)^r \cdot h(\tau), \\ h(\tau) &= (c\tau + d)^{-k-r} \cdot (cz + d)^{-r} \cdot g(M\tau) \ . \end{aligned}$$

Hier ist aber h in z holomorph mit $h(z) \neq 0$. □

Wie in 1.2(5) wird die Ordnung von f in ∞ erklärt: Nach (M.3*) besitzt f eine Fourier–Entwicklung der Form

$$(3) \qquad f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \ , \quad \alpha_f(m_0) \neq 0,$$

und man setzt

(4) $$\operatorname{ord}_\infty f := m_0.$$

Damit ist $\operatorname{ord}_w f$ speziell für alle w aus

(5) $$\mathbb{F}^* := \mathbb{F} \cup \{\infty\}$$

erklärt. Man definiert noch für $w \in \mathbb{F}^*$

(6) $$\operatorname{ord}\ w := \begin{cases} 2 & \text{für } w = i, \\ 3 & \text{für } w = \rho, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach II.2.3 ist die Zahl $2 \cdot \operatorname{ord}\ w$ für $w \in \mathbb{F}$ gleich der Ordnung der Fixgruppe von w

$$\Gamma_w = \{M \in \Gamma\ ;\ Mw = w\}$$

(vgl. II.2.3(1)). Die meisten weiteren nicht–trivialen Ergebnisse beruhen nun direkt oder indirekt auf der

Gewichtsformel. *Für eine Modulform $f \neq 0$ vom Gewicht k gilt:*

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord}\ w} \cdot \operatorname{ord}_w f = \frac{k}{12}.$$

Natürlich ist dies eine endliche Summe, denn die Null- und Polstellen von f können sich wegen (3) in $\mathbb{F}^*$ nicht häufen. Der *Beweis* wird im weiteren Verlauf dieses Paragrafen ausgeführt.

2. Das Umlaufintegral. Sei $0 \neq f \in \mathbb{V}_k$. Wir wollen das die Pole und Nullstellen von f zählende Integral

(1) $$\int_\gamma F(\tau)d\tau \quad \text{für } F := f'/f$$

längs eines Weges γ berechnen, der einem modifizierten Rand des exakten Fundamentalbereiches $\mathbb{F}$ entspricht.

Für alle $w \in \mathbb{H}$ gilt bekanntlich

(2) $$\operatorname{res}_w F = \operatorname{ord}_w f.$$

Ist dagegen f für hinreichend großen Imaginärteil von τ durch 1(3) gegeben, dann erhält man, wenn man die FOURIER–Reihe von f' durch die von f dividiert, eine FOURIER–Reihe für F der Form

(3) $$F(\tau) = 2\pi i \cdot \operatorname{ord}_\infty f + \sum_{m \geq 1} \alpha_F(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Als Weg γ wird nun der wie folgt abgeänderte Rand von $\mathbb{F}$ gewählt:

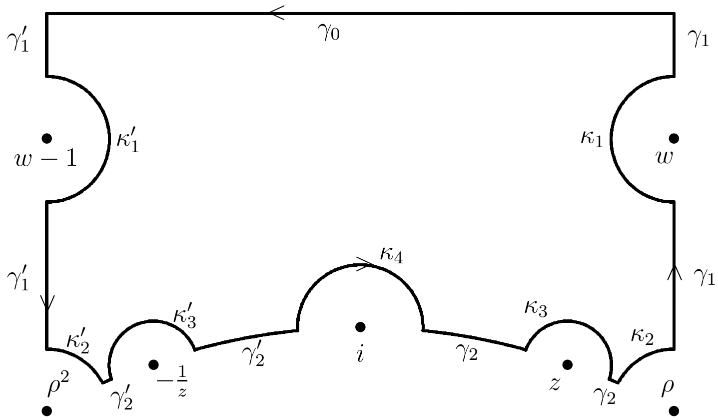

Abb. 23: Integrationsweg

In den Fixpunkten und in denjenigen Randpunkten von $\mathbb{F}$, in denen f eine Null– oder Polstelle besitzt, wird der Rand durch einen Kreisbogen κ bzw. κ' vom Radius $\varepsilon > 0$ ins Innere von $\mathbb{F}$ ersetzt. Dabei ist ε so klein zu wählen, dass außer evtl. im Mittelpunkt weder eine Null– noch eine Polstelle von f im Vollkreis vom Radius ε liegt. Der Weg γ besteht nun aus den Geraden– bzw. Kreisbogenstücken γ_ν, γ_ν' bzw. κ_μ, κ_μ' in dem angegebenen Durchlaufungssinn. Dabei ist γ_0 so zu wählen, dass f in $\{\tau \in \mathbb{H};\, \mathrm{Im}\ \tau \geq y_0\}$ weder Pole noch Nullstellen hat.

Nach Wahl von γ ergibt der Residuensatz wegen (2) nun

$$(4) \qquad 2\pi i \cdot \sum_{w \in \overset{\circ}{\mathbb{F}}} \mathrm{ord}_w\, f = \int_\gamma F(\tau) d\tau.$$

Man beachte hier, dass die linke Seite von (4) nicht von der Wahl von ε abhängt. Auf der rechten Seite kann daher der Limes $\varepsilon \to 0$ ausgeführt werden.

Da hier gewisse Teile von γ durch Modulsubstitutionen aufeinander bezogen werden können, benötigt man das Verhalten von F bei Modulsubstitutionen. Aus $f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau)$ erhält man durch logarithmische Differentiation

$$(5) \qquad F(M\tau) \cdot \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{kc}{c\tau + d} + F(\tau) \quad \text{für } \ M \in \Gamma.$$

3. Die Wege γ_ν' und γ_ν. Nach 2(3) und der Koeffizientendarstellung 1.2(4) gilt zunächst

$$(1) \qquad \int_{\gamma_0} F(\tau) d\tau = -2\pi i \cdot \mathrm{ord}_\infty\, f.$$

Zum Nachweis von

$$(2) \qquad \int_{\gamma_1'} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_1} F(\tau)d\tau = 0 \quad \text{unabhängig von } \varepsilon$$

hat man zunächst $F(\tau+1) = F(\tau)$ gemäß 2(5). Nun folgt (2), da die Abbildung $\tau \mapsto \tau + 1$ den Weg γ_1' auf den Weg $-\gamma_1$ abbildet, wobei das Minuszeichen die Umkehrung der Orientierung angibt.

Für $M = J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt 2(5)

$$(3) \qquad F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} = \frac{k}{\tau} + F(\tau),$$

also

$$(4) \qquad \int_{J\sigma} F(\tau)d\tau = \int_{\sigma} F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} d\tau = k \cdot \int_{\sigma} \frac{d\tau}{\tau} + \int_{\sigma} F(\tau)d\tau$$

für jeden Weg σ in $\mathbb{H}$, der keinen Pol von F trifft.

Wegen $\gamma_2' = -(J\gamma_2)$ liefert (4)

$$\int_{\gamma_2'} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_2} F(\tau)d\tau = -k \cdot \int_{\gamma_2} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Daraus folgt

$$(5) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\gamma_2'} F(\tau)d\tau + \int_{\gamma_2} F(\tau)d\tau \right\} = -k \cdot \int_i^{\rho} \frac{d\tau}{\tau} = 2\pi i \cdot \frac{k}{12}.$$

4. Die Wege κ_μ' und κ_μ. Sind κ_3' bzw. κ_3 die Kreisbogenstücke der Kreise mit Mittelpunkt $-1/z$ bzw. z, so wird

$$(1) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int_{\kappa_3} F(\tau)d\tau \right\} = -2\pi i \cdot \operatorname{ord}_z f.$$

Wegen 3(4) ist hier die linke Seite gleich

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{J\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int_{\kappa_3} F(\tau)d\tau \right\}.$$

Nach dem CAUCHYschen Integralsatz können die beiden Integrale durch ein Integral über den negativ orientierten Kreis $|\tau - z| = \varepsilon$ ersetzt werden. Damit ist (1) gleich $-2\pi i \cdot \operatorname{res}_z F$. Wegen 2(2) folgt die Behauptung (1).

Zum Nachweis von

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_2} F(\tau)d\tau = -\frac{2\pi i}{6}\cdot \mathrm{ord}_\rho f = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_2'} F(\tau)d\tau \tag{2}$$

hat man für die linke Seite

$$-\mathrm{res}_\rho F \cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_2} \frac{d\tau}{\tau-\rho}. \tag{$*$}$$

Hier wählt man $\alpha = \alpha(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ mit

$$|e^{i\alpha}-\rho| = \varepsilon\ , \quad \frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

und bezeichnet mit $\varphi = \varphi(\varepsilon)$ den Winkel zwischen $e^{i\alpha}$ und $\rho + i\varepsilon$ (siehe Abb. 24). In $(*)$ substituiert man $\tau = \rho + \varepsilon e^{it}$, $\frac{\pi}{2}+\varphi \le t \le \frac{\pi}{2}$ und erhält für $(*)$

$$i\cdot \mathrm{ord}_\rho f \cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon) = -\frac{\pi i}{3}\cdot \mathrm{ord}_\rho f$$

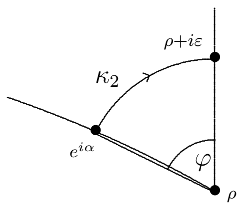

Abb. 24: Der Weg κ_2

wegen 2(2). Damit hat das erste Integral in (2) den behaupteten Wert. Für das zweite Integral geht man entsprechend vor.

Völlig analog erhält man schließlich

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_4} F(\tau)d\tau = -\frac{2\pi i}{2}\cdot \mathrm{ord}_i f \tag{3}$$

sowie

$$\int\limits_{\kappa_1'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_1} F(\tau)d\tau = -2\pi i\cdot \mathrm{ord}_w f. \tag{4}$$

Zum *Beweis* der Gewichtsformel geht man nun von 2(4) aus und sammelt die Integrale auf der rechten Seite gemäß den Gleichungen (1), (2) und (5) in **3** sowie (1), (2), (3) und (4). $\square$

Aufgaben. 1) Für $0 \ne f \in \mathbb{V}_k$ gilt

$$6\,\mathrm{ord}_i f \ + \ 4\,\mathrm{ord}_\rho f \ \equiv \ k\,(\mathrm{mod}\ 12), \quad \mathrm{ord}_i f \ \equiv \ k/2\,(\mathrm{mod}\ 2) \quad \text{und} \quad \mathrm{ord}_\rho f \ \equiv k/2\,(\mathrm{mod}\ 3).$$

2) Für $0 \ne f \in \mathbb{K}$ ist $\mathrm{ord}_i f$ gerade und $\mathrm{ord}_\rho f$ durch 3 teilbar.

3) Ein nicht-konstantes $f \in \mathbb{K}$, das auf $\mathbb{H}$ holomorph ist, hat bei ∞ einen Pol.

(i) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$*;*
(ii) $\langle f,g\rangle$ *is* $\mathbb{C}$*-linear in* f*;*
(iii) $\langle f,f\rangle \geq 0$ *and moreover* $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f\equiv 0$*.*

In particular, integrating against Poincaré series yields the Fourier coefficients of cusp forms.

Theorem 2.9. *(Petersson coefficient formula) For* $f(\tau)=\sum_{m\geq 1} a(m)e^{2\pi i m\tau}\in S_k$*, we have*

$$\langle f, P_{k,n}\rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } n=0,\\ \frac{(k-2)!}{(4\pi n)^{k-1}}a(n) & \text{for } n\geq 1.\end{cases}$$

In particular $E_k \perp S_k$ *with respect to the Petersson scalar product.*

Proof. We only argue formally and ignore questions of convergence. We have

$$\langle f, P_{k,n}\rangle = \int_{\mathcal{F}} f(\tau) \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \overline{e^{2\pi i n\tau}\big|_k M} y^k d\mu \tag{2.4}$$

$$= \sum_{M\in\Gamma_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \int_{\mathcal{F}} f\big|_k M(\tau)\overline{e^{2\pi i n\tau}\big|_k M} y^k d\mu = \int_{\bigcup_{M\in\Gamma_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} M\mathcal{F}} f(\tau)\overline{e^{2\pi i n\tau}} y^k d\mu.$$

Note that $\cup_{M\in\Gamma_\infty\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} M\mathcal{F}$ is a fundamental domain for the action of Γ_∞ on $\mathbb{H}$ and that $f(\tau)\overline{e^{2\pi i n\tau}}y^k$ is invariant under the action of Γ_∞. Thus we may change $\cup_{M\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} M\mathcal{F}$ into

$$\{\tau = x+iy; 0\leq x\leq 1, y>0\}.$$

This gives that (2.4) equals

$$\int_0^\infty\int_0^1 f(\tau)e^{-2\pi i n\overline{\tau}}y^{k-2}dxdy = \sum_{m\geq 1} a(m)\int_0^\infty e^{-2\pi(n+m)y}y^{k-2}dy\int_0^1 e^{2\pi i(m-n)x}dx.$$

Now the claim follows by using that

$$\int_0^1 e^{2\pi i\ell x}dx = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell=0,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^{k-2}dt = (k-2)!.$$

□

To show that the Poincaré series constitute a basis of S_k, we first require the Valence formula (see [31] for a proof).

Theorem 2.10. *If $f \not\equiv 0$ is a meromorphic modular form of weight $k \in \mathbb{Z}$, we have with $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$*

$$\operatorname{ord}(f;\infty) + \frac{1}{2}\operatorname{ord}(f;i) + \frac{1}{3}\operatorname{ord}(f;\rho) + \sum_{\substack{z\in\Gamma\backslash\mathbb{H} \\ z\not\equiv i,\rho \pmod{\Gamma}}} \operatorname{ord}(f;z) = \frac{k}{12},$$

where $\operatorname{ord}(f;\infty) = n_0$ *if* $f(\tau) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n)q^n$ *with* $a(n_0) \neq 0$.

One can conclude from Theorem 2.10 the following dimension formulas, the proof is omitted here.

Corollary 2.11. *For $k \in \mathbb{N}_0$, we have*

$$\dim M_{2k} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor + 1 & \text{if } k \not\equiv 1 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{if } k \equiv 1 \pmod{6}, \end{cases}$$

$$\dim S_k = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor & \text{if } k \not\equiv 1 \pmod{6}, \\ \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor - 1 & \text{if } k \equiv 1 \pmod{6}, k \geq 7, \\ 0 & \text{if } k = 1. \end{cases}$$

This easily gives the basis property of the Poincaré series.

Corollary 2.12. *(Completeness theorem) Let $k \geq 4$ even and $d_k := \dim(S_k)$. Then a basis of S_k is given by*

$$\{P_{k,n}; n = 1, \ldots, d_k\}.$$

In particular, M_k has a basis consisting of Eisenstein series and Poincaré series.

Proof. Set $S := \operatorname{span}\{P_{k,1}, \ldots, P_{k,d_k}\} \subset S_k$ and $f \in S_k$ such that $f \perp S$ with respect to the Petersson inner product. Then f has a Fourier expansion of the shape $f(\tau) = \sum_{m \geq d_k+1} a(m)e^{2\pi i m\tau}$. From Corollary 2.11 we know the precise shape of d_k, yielding a contradiction to Theorem 2.10. To be more precise, we have for $k \not\equiv 2 \pmod{12}$

$$d_k + 1 = \left\lfloor \frac{k}{12} \right\rfloor + 1 > \frac{k}{12} = \operatorname{ord}(f;\infty) + \sum_{z\in\Gamma\backslash\mathbb{H}} \operatorname{ord}(f;z) \geq d_k + 1.$$

For $k \equiv 2 \pmod{12}$, we get

$$\frac{k}{12} = d_k + 1 + \frac{1}{6}.$$

Thus $\mathrm{ord}(f;\infty) = d_k + 1$ and

$$\sum_{z\in\Gamma\backslash\mathbb{H}} \mathrm{ord}(f;z) = \frac{1}{6}$$

which is impossible. □

We next compute the Fourier coefficients $a_n(m)$ of the Poincaré series $P_{k,n}$. For this, we require some special functions. Define the *Kloosterman sums*

$$S(m,n;c) := \sum_{a \pmod{c}^\star} e^{2\pi i \frac{am+\bar{a}n}{c}},$$

where the sum runs over all $a \pmod{c}$ that are coprime to c and $\overline{a}$ denotes the multiplicative inverse of $a \pmod{c}$. Moreover, we let J_r be the J-Bessel function of order r, defined by

$$J_r(x) := \sum_{\ell\geq 0} \frac{(-1)^\ell}{\ell!\Gamma(\ell+1+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{r+2\ell},$$

where $\Gamma(x)$ denotes the usual gamma-function.

Theorem 2.13. *We have for $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n(m) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}} \left(\delta_{m,n} + 2\pi i^{-k} \sum_{c\geq 1} c^{-1} S(n,m;c)\, J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)\right), \tag{2.5}$$

where

$$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Proof. We again use that a set of representatives of $\Gamma_\infty\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ is given by

$$\left\{\begin{pmatrix} \star & \star \\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}); (c,d) = 1\right\}.$$

The contribution for $c = 0$ is easily seen to give the first summand in (2.5). For $c \neq 0$ we use the identity

$$\frac{a\tau+b}{c\tau+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2\left(\tau+\frac{d}{c}\right)}$$

and change $d \mapsto d + mc$, where d runs $\pmod{c}^\star$ and $m \in \mathbb{Z}$. This gives

$$P_{k,n}(\tau) = e^{2\pi i n\tau} + 2\sum_{c\geq 1} c^{-k} \sum_{d \pmod{c}^\star} e^{\frac{2\pi i n a}{c}} \mathcal{F}\left(\tau + \frac{d}{c}\right),$$

where a is defined by $ad \equiv 1 \pmod{c}$ and

$$\mathcal{F}(\tau) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi i n}{c^2(\tau+m)}} (\tau+m)^{-k}.$$

Now the classical Poisson summation formula yields that

$$\mathcal{F}(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a(m) e^{2\pi i m\tau}$$

with

$$a(m) = \int_{\mathrm{Im}(\tau)=\mathcal{C}} \tau^{-k} e^{-\frac{2\pi i n}{c^2\tau} - 2\pi i m\tau} d\tau$$

with $\mathcal{C} > 0$ arbitrary. For $m \leq 0$ we can deform the path of integration up to infinity yielding that $a(m) = 0$ in this case. For $m > 0$ we make the substitution $\tau = ic^{-1}(n/m)^{\frac{1}{2}} w$ to get

$$a(m) = i^{-k-1} c^{k-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{C}-i\infty}^{\mathcal{C}+i\infty} w^{-k} e^{\frac{2\pi}{c}\sqrt{mn}\left(w-w^{-1}\right)} dw.$$

The claim follows using that for μ, $\kappa > 0$ the functions

$$t \mapsto (t/\kappa)^{\frac{\mu-1}{2}} J_{\mu-1}\left(2\sqrt{\kappa t}\right), \quad (t > 0)$$

and

$$w \mapsto w^{-\mu} e^{-\frac{\kappa}{w}}, \quad (\mathrm{Re}(w) > 0)$$

are inverses of each other with respect to the usual Laplace transform (8.412.2 of [23]). $\square$

3. Weakly holomorphic modular forms

We next turn to *weakly holomorphic* modular forms which are still holomorphic on $\mathbb{H}$ but allow poles at the "cusps". The Fourier coefficients of such forms are growing much faster than those of holomorphic forms. Let us in particular describe this in the situation of the partition function.

Recall that a *partition* of a positive integer n is a nondecreasing sequence of positive integers (the *parts* of the partition) whose sum is n. Let $p(n)$ denote the number of partitions of n. For example, the partitions of 4 are

$$4 \qquad 3+1 \qquad 2+2 \qquad 2+1+1 \qquad 1+1+1+1$$

so that $p(4)=5$. The partition function is very rapidly increasing. For example we have that

$$\begin{aligned} p(3) &= 3,\\ p(4) &= 5,\\ p(10) &= 42,\\ p(20) &= 627,\\ p(100) &= 190569292. \end{aligned}$$

A key observation by Euler is the product identity

$$P(q) := 1 + \sum_{n\geq 1} p(n)q^n = \prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-q^n}.$$

One can show that for $|q|<1$, the function P is holomorphic. Using Euler's identity one can embed the partition function into the modular world using the Dedekind η-function ($q=e^{2\pi i\tau}$)

$$\eta(\tau) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\geq 1} \left(1-q^n\right).$$

This function is a modular form of weight 1/2. To be more precise, we have the following transformation laws (see e.g. [31]).

Theorem 3.14. *We have*

$$\begin{aligned} \eta(\tau+1) &= e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau),\\ \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau}\eta(\tau). \end{aligned}$$

Theorem 3.14 in particular gives the asymptotic behavior of η as $\tau\to 0$. To be more precise, Theorem 3.14 implies that

$$P(q) \sim \sqrt{-i\tau}e^{\frac{\pi i}{12\tau}} \qquad (\tau\to 0).$$

We moreover note that the coefficients $p(n)$ are easily seen to be positive and monotonic. From this, we may conclude the growth behavior of $p(n)$ using a Tauberian Theorem due to Ingham [27].

Theorem 3.15. *Assume that $f(\tau) := q^{n_0}\sum_{n\geq 0} a(n)q^n$ is a holomorphic function on $\mathbb{H}$, satisfying the following conditions:*

(i) *For all $n\in\mathbb{N}_0$, we have*

$$0 < a(n) \leq a(n+1).$$