PERIODEN UND GITTER ([1], S. 11–20)

In Ihrem Vortrag sollen Sie elliptische Funktionen definieren. Wiederholen Sie dazu auch die nötigen Grundlagen aus der Funktionentheorie. Erinnern Sie zunächst an die Definition von *meromorphen Funktionen* und *Polstellen*. Eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Polstellen in $D_f \subset \mathbb{C}$ nennen wir *periodisch* mit *Periode* $\omega \in \mathbb{C}$, falls für $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$ gilt:

$$f(z+w) \quad = \quad f(z).$$

Es sei P_f die Menge aller Perioden $\omega \in \mathbb{C}$ von f. Zeigen Sie, dass P_f (bzgl. Addition) eine abgeschlossene, diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$ ist. Beweisen Sie folgenden Satz.

Satz 1. *Ist f eine nicht konstante meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, so tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:*

(1) $P_f = \{0\}$.

(2) *Es gibt ein (bis auf das Vorzeichen eindeutiges) $\omega_f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit*

$$P_f = \mathbb{Z}\omega_f.$$

(3) *Es gibt über $\mathbb{R}$ linear unabhängige $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit*

$$P_f \quad = \quad \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2,$$

so dass für $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ gilt:

$$\mathrm{Im}(\tau) > 0, \ |\mathrm{Re}(\tau)| \leq \frac{1}{2}, \ |\tau| \geq 1.$$

Es sei nun V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq V$ eine Basis von V. Dann nennen wir die diskrete Untergruppe

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_n \subset V$$

ein *Gitter in V*. Im Fall (3) von Satz 1 ist $P_f \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Für ein beliebiges Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ definieren wir den *Torus*

$$\mathbb{C}/\Lambda = \left\{ a + \Lambda \middle| a \in \mathbb{C} \right\}.$$

Weiterhin definieren wir für $u \in \mathbb{C}$ und $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ das *Perioden-Parallelogramm*

$$P = P(u; \omega_1, \omega_2) = \left\{ u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 \middle| 0 \leq \alpha_1 < 1, \ 0 \leq \alpha_2 < 1 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi : P \to \mathbb{C}/\Lambda$,

$$\pi(z) = z + \Lambda$$

bijektiv ist.

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.