DIE WEIERSTRASSSCHE $\wp$-FUNKTION ([1], S. 22–23, 27–28, 34–37)

In diesem Vortrag konstruieren Sie die *Weierstrasssche $\wp$-Funktion* als ein Beispiel einer elliptischen Funktionen. Zeigen Sie:

Satz 1. *Es sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann gibt es eine elliptische Funktion $\wp = \wp_\Lambda$, die auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ holomorph ist und für jedes $z \in \Lambda$ eine Polstelle 2. Ordnung hat.*

Wir definieren die Funktion

$$\wp(z) = \wp_\Lambda(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2} \right). \tag{1}$$

Weisen Sie nach, dass $\wp$ die in Satz 1 geforderten Eigenschaften hat. Der Kern des Beweises ist die lokal gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe:

Satz 2. *Es sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und es gelte $K \cap \Lambda = \emptyset$. Dann konvergiert die Reihe $\wp_\Lambda(z)$ in K absolut gleichmäßig .*

Um Satz 2 zu beweisen, betrachten wir die *Eisenstein-Reihe*

$$G_k = G_k(\Lambda) = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \omega^{-k}.$$

Zeigen Sie:

Lemma 3. *Für $k \geq 3$ konvergiert die Reihe G_k absolut.*

Aufgrund von Satz 2 können wir die Reihe $\wp(z)$ umordnen und daher folgt, dass für $\omega \in \Lambda$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ gilt:

$$\wp(z+\omega) = \wp(z).$$

Beenden Sie den Beweis von Satz 1, indem Sie zeigen:

Proposition 4. *Die Funktion $\wp$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ holomorph. Die Funktion $\wp$ hat in jedem $z \in \Lambda$ eine Polstelle 2. Ordnung mit Residuum 0.*

Berechnen Sie schließlich die Laurent-Reihe von $\wp$:

Satz 5. *Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < \min \left\{ |\omega| \,\middle|\, 0 \neq \omega \in \Lambda \right\}$. Dann gilt*

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} z^{2n-2}.$$

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.