DER KÖRPER DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN ([1], S. 28–32)

Im vorangegangenen Vortrag haben wir die Weierstrasssche $\wp$-Funktion betrachtet. Benutzen Sie in Ihrem Vortrag die Funktion $\wp$, um den Körper aller elliptischer Funktionen zu beschreiben.

Zeigen Sie zunächst, dass $\wp$ eine gerade und $\wp'$ eine ungerade Funktion ist. Bestimmen Sie dann die Nullstellen von $\wp'$:

Lemma 1. *Es sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und $\omega \in \Lambda \backslash 2\Lambda$. Dann hat $\wp'(z)$ eine einfache Nullstelle bei $z = \frac{\omega}{2}$. Alle Nullstellen von $\wp'(z)$ haben diese Form.*

Zeigen Sie:

Lemma 2. *Es sei $z \in \mathbb{C}$, so dass für alle $\omega \in \Lambda \backslash 2\Lambda$ gilt:*

$$z \neq \wp\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Es sei P ein Perioden-Parallelogram von Λ. Dann gibt es genau zwei $u, v \in P$ mit

$$\wp(u) = \wp(v) = z.$$

Wir betrachten nun ein Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ und schreiben $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ sowie $e_k = \wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)$ für $k = 1, 2, 3$. Zeigen Sie als Anwendung von Lemma 1 und Lemma 2, dass die Funktion

$$\wp(z) - w$$

für $w = e_k$ genau eine Nullstelle (bei $z = \frac{\omega_k}{2}$) 2. Ordnung in P hat. Falls $w \neq e_1, e_2, e_3$ ist, so hat $\wp(z) - w$ zwei einfache Nullstellen in P.

Leiten Sie nun aus dem Satz von Liouville folgende Differentialgleichung für $\wp(z)$ her:

Satz 3. *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ gilt:*

$$\wp'(z)^2 = 4\left(\wp(z) - e_1\right)\left(\wp(z) - e_2\right)\left(\wp(z) - e_3\right).$$

Beschreiben Sie schließlich den Körper $\mathcal{K}(\Lambda)$ der elliptischen Funktionen:

Satz 4.

(1) *Die geraden elliptischen Funktionen bezüglich Λ sind genau die rationalen Funktionen in $\wp$.*

(2) *Es gilt:*

$$\mathcal{K}(\Lambda) = \mathbb{C}(\wp)[\wp'].$$

(3) *Der Grad der Körpererweiterung von $\mathcal{K}(\Lambda)$ über $\mathbb{C}(\wp)$ ist 2.*

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.