DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG VON $\wp$ ([1], S. 37–41)

Im vorangegangenen Vortrag haben wir gesehen, dass die Weierstrasssche $\wp$-Funktion folgende Differentialgleichung erfüllt $\left(\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2,\ \omega_3 = \omega_1 + \omega_2,\ e_k = \wp\left(\frac{\omega_k}{2}\right)\right)$:

$$\wp'(z)^2 = 4\left(\wp(z) - e_1\right)\left(\wp(z) - e_2\right)\left(\wp(z) - e_3\right). \tag{1}$$

Um diese Differentialgleichung umzuschreiben, betrachten wir die Eisenstein-Reihen $g_k(\Lambda)$ auf der Menge aller Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} g_2 &= g_2(\Lambda) = 60G_4(\Lambda), \\ g_3 &= g_3(\Lambda) = 140G_6(\Lambda). \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

Satz 1. *Die Weierstrasssche $\wp$-Funktion erfüllt die Differentialgleichung*

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{2}$$

Die Konstanten $g_2(\Lambda)$ und $g_3(\Lambda)$ nennen wir die *Weierstrass-Invarianten* des Gitters Λ. Beweisen Sie folgende Korollare:

Korollar 2. *Es gilt:*

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2. \tag{3}$$

Korollar 3. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Im letzten Vortrag haben wir den Körper der elliptischen Funktionen $\mathcal{K}(\Lambda)$ beschrieben. Zeigen Sie folgende Charakterisierung der auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$:

Korollar 4. *Es sei $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *Die Funktion f ist auf $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ holomorph.*
(2) *Es gilt $f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp]\wp'$.*

Zeigen Sie auch folgende Umkehrung zu Satz 1.

Korollar 5. *Es sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$ mit Weierstrass-Invarianten g_2 und g_3. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf G. Wenn f die Differentialgleichung*

$$f'^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3$$

erfüllt, dann gibt es eine Konstante w, so dass für jedes $z \in G$ gilt:

$$f(z) = \wp(z + w).$$

Wenn f darüberhinaus meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, so ist Λ das Perioden-Gitter von f. Das Gitter Λ ist durch g_2 und g_3 eindeutig bestimmt.

Durch Koeffizientenvergleich der Laurent-Reihen von $\wp^2$ und $\wp''$ erhalten wir aus (3) folgende Rekursionsformel für die Eisenstein-Reihen G_k.

Korollar 6. *Für $n \geq 4$ gilt:*

$$(n-3)(2n+1)(2n-1)\,G_{2n} = 3 \sum_{\substack{p\geq 2,\, q\geq 2\\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1)\,G_{2p}G_{2q}.$$

Insbesondere ist

$$G_{2n} \in \mathbb{Q}\left[G_4, G_6\right].$$

Vergleichen Sie nun (1) und (2) miteinander und zeigen Sie

$$4X^3 + g_2 X - g_3 = 4\left(X - e_1\right)\left(X - e_2\right)\left(X - e_3\right). \tag{4}$$

Beweisen Sie:

$$\mathcal{K}\left(\Lambda\right) \cong \mathbb{C}\left(X\right)\left[Y\right]/I\left(X,Y\right).$$

Hierin ist $I\left(X,Y\right)$ das von $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$ erzeugte Hauptideal.

Durch Vergleich der Koeffizienten in (4) erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ g_2 &= -4\left(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1\right), \\ g_3 &= 4e_1e_2e_3. \end{aligned}$$

Betrachten Sie schließlich die *Diskriminante*

$$\Delta = \Delta\left(\Lambda\right) = g_2^3 - 27g_3^2$$

eines Gitters Λ. Die Diskriminante ist eine wichtige Invariante mit deren Hilfe wir die *absolute Invariante*

$$j = j\left(\Lambda\right) = \frac{\left(12g_2\right)^3}{\Delta}$$

definieren. Zeigen Sie, dass Δ nirgends verschwindet. Benutzen Sie hierzu die Formel

$$\Delta = 16\left(e_1 - e_2\right)^2\left(e_2 - e_3\right)^2\left(e_3 - e_1\right)^2$$

sowie die Tatsache, dass $e_j \neq e_k$ für $j \neq k$ gilt (dies wurde im letzten Vortrag gezeigt).

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.