DIE WEIERSTRASSSCHE $\wp$-FUNKTION UND KOMPLEXE KONJUGATION ([1], S. 42–44)

In den beiden vorangegangenen Vorträgen haben wir die Weierstrasssche $\wp$-Funktion betrachtet. Untersuchen Sie in Ihrem Vortrag die Wirkung der komplexen Konjugation auf $\wp$. Zu einem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ definieren wir das *konjugierte Gitter*

$$\overline{\Lambda} = \left\{ \overline{\omega} \,\middle|\, \omega \in \Lambda \right\}.$$

Ein Gitter Λ heißt *konjugationsstabil*, falls gilt:

$$\Lambda = \overline{\Lambda}.$$

Zeigen Sie:

Proposition 1. Ist Λ ein konjugationsstabiles Gitter, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$:

$$\overline{\wp_\Lambda(z)} = \wp_\Lambda(\overline{z}),$$
$$\overline{\wp'_\Lambda(z)} = \wp'_\Lambda(\overline{z}).$$

Wir hatten die Eisenstein-Reihen

$$G_k = G_k(\Lambda) = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \omega^{-k}$$

betrachtet und folgende Invarianten von Gittern $\Lambda \subset \mathbb{C}$ definiert:

$$g_2 = g_2(\Lambda) = 60 G_4(\Lambda),$$
$$g_3 = g_3(\Lambda) = 140 G_6(\Lambda).$$

Wir hatten gesehen, dass die Invarianten $g_2(\Lambda)$ und $g_3(\Lambda)$ zusammen ein Gitter Λ eindeutig bestimmen. Die Werte $g_2(\Lambda)$ und $g_3(\Lambda)$ charakterisieren auch die konjugationsstabilen Gitter wie folgt. Zeigen Sie:

Satz 2. *Für ein Gitter $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

1. *Die Invarianten $g_2(\Lambda)$ und $g_3(\Lambda)$ sind reell.*
2. *Alle Werte $G_k(\Lambda)$ für $k > 2$ sind reell.*
3. *Von den Größen $e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$ sind zwei konjugiert komplex und die dritte reell oder alle drei reell.*
4. *Das Gitter Λ ist konjugationsstabil.*

Als nächstes betrachten wir den Spezialfall eines *Rechteck-Gitters*, d.h. eines Gitters der Form $\Lambda = \mathbb{Z}iy + \mathbb{Z}x$ mit reellen $x, y > 0$. Zeigen Sie, dass jedes Rechteck-Gitter konjugationsstabil ist und beweisen Sie:

Satz 3. *Es sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck-Gitter ($\omega_1 = iy, \omega_2 = x$ mit $x, y > 0$). Dann gilt:*

1. *Für $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ ist $\wp(z)$ genau dann reell, wenn es ein $\omega \in \Lambda$ gibt mit*

$$z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R} \qquad \text{oder} \qquad z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}.$$

(2) *Für* $z \in \frac{\omega}{2} + \mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda$, $z \notin \Lambda$, *ist* $\wp'(z)$ *reell.*
(3) *Für* $z \in \frac{\omega}{2} + i\mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda$, $z \notin \Lambda$, *ist* $\wp'(z)$ *rein imaginär.*
(4) *Das Innere des Rechtecks mit den Eckpunkten* $0, \frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_3}{2}, \frac{\omega_2}{2}$ *wird von* $\wp$ *bijektiv auf die untere Halbebene* $\{\tau \in \mathbb{C} \mid Im(\tau) < 0\}$ *abgebildet. Der Rand des Rechtecks wird von* $\wp$ *bijektiv auf die reelle Zahlengerade abgebildet.*

Zeigen Sie schließlich, dass für ein Rechteck-Gitter Λ und für $0 < r < s < \frac{\omega_2}{2}$ gilt:

$$\int_{\wp(s)}^{\wp(r)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2(\Lambda)t - g_3(\Lambda)}} = s - r.$$

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.