MODULARITÄT DER EISENSTEIN-REIHEN ([1], S. 16–19, 47–48)

In den vorangegangenen Vorträgen haben wir die Eisenstein-Reihen G_k ($4 \leq k \in 2\mathbb{N}$) auf der Menge aller Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ betrachtet:

$$G_k(\Lambda) = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} w^{-k}.$$

Wir haben gesehen, dass G_4 und G_6 im Wesentlichen die Koeffizienten der Differentialgleichung der Weierstrassschen $\wp$-Funktion sind. Untersuchen Sie die Eisenstein-Reihen nun genauer. Zeigen Sie zunächst, dass für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$G_k(\lambda\Lambda) = \lambda^{-k} G_k(\Lambda). \tag{1}$$

Zu jedem Gitter $\Lambda \subset \mathbb{C}$ gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ mit $\Lambda = \lambda\Lambda_\tau$, $\Lambda_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$. Wir schreiben daher $G_k(\tau) = G_k(\Lambda_\tau)$. Leiten Sie in Ihrem Vortrag die *modulare Transformationseigenschaft* von $G_k(\tau)$ her:

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k\, G_k(\tau), \tag{2}$$

worin $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Zeigen Sie zunächst:

Lemma 1 (Basis-Lemma)**.** *Zwei Gitter $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}\widetilde{\omega}_1 + \mathbb{Z}\widetilde{\omega}_2 \subset \mathbb{C}$ sind genau dann gleich, wenn es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit*

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}_1 &= a\omega_1 + b\omega_2, \\ \widetilde{\omega}_2 &= c\omega_1 + d\omega_2. \end{aligned}$$

Es sei nun $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathbb{H}$. Wir schreiben

$$\gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \in \mathbb{H}.$$

Es folgt:

$$\Lambda_\tau = (c\tau + d)\Lambda_{\gamma\tau.}$$

Leiten Sie schließlich Gleichung (2) aus (1) her.

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.