DIE FOURIER-REIHEN DER EISENSTEIN-REIHEN ([1], S. 392–394, [2], S. 49–51)

Berechnen Sie in Ihrem Vortrag die Fourier-Reihen der Eisenstein-Reihen ($\tau \in \mathbb{H}$)

$$G_k(\tau) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} (m\tau + n)^{-k}.$$

Benutzen Sie folgende Darstellung des Kotangens (ohne Beweis):

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n} \right).$$

Folgern Sie für $z \in \mathbb{H}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z+n)^{-2} = (2\pi i)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n e^{2\pi i n z}.$$

Durch wiederholtes Ableiten dieser Gleichung erhalten Sie:

Proposition 1. Es sei $k \geq 2$ eine ganze Zahl und $z \in \mathbb{H}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (z+n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r z}.$$

Wir erinnern an die Riemannsche ζ-Funktion ($\operatorname{Re}(s) > 1$):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Desweiteren definieren wir für $r \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_r(n) = \sum_{d \mid n} d^r.$$

Zeigen Sie nun:

Satz 2. *Es sei $k \geq 4$ eine gerade Zahl und $\tau \in \mathbb{H}$. Dann gilt:*

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

Im fünften Vortrag hatten wir bewiesen:

$$(n-3)(2n+1)(2n-1) G_{2n} = 3 \sum_{\substack{p \geq 2,\, q \geq 2 \\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1) G_{2p} G_{2q}.$$

Verwenden Sie diese Identität sowie Satz 2, um zu zeigen:

Korollar 3 (Hurwitz-Identität)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sigma_7(n) = \sigma_3(n) + 120 \sum_{r=1}^{n-1} \sigma_3(r) \sigma_3(n-r).$$

References

[1] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 1–537.
[2] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.