DIE ABSOLUTE INVARIANTE $j(\tau)$ ([2], S. 53–56)

Im fünften Vortrag hatten wir die absolute Invariante $j(\Lambda)$ eines Gitters $\Lambda \subset \mathbb{C}$ definiert. Wir betrachten nun Gitter der Form $\Lambda = \Lambda_\tau = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ mit $\tau \in \mathbb{H}$ und definieren

$$j(\tau) = j(\Lambda_\tau).$$

Für $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ setzen wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Zeigen Sie:

Satz 1. *Die Funktion $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und besitzt eine Fourier-Reihe der Form*

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{n \geq 0} a_n e^{2\pi i n\tau}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \geq 0$. Für alle $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gilt:

$$j(\gamma\tau) = j(\tau).$$

Satz 2. *Sind $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}$ und gilt $j(\tau_1) = j(\tau_2)$, dann gibt es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit*

$$\tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}.$$

Das Gebiet

$$\mathbb{F} = \left\{ \tau \in \mathbb{H} \;\middle|\; -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \text{ and } |\tau| > 1 \text{ for } -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Re}(\tau) < 0 \right\}$$

enthält aus jedem *Orbit* $\{\gamma\tau \mid \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\}$ genau einen Vertreter. Ein derartiges Gebiet nennen wir *Fundamentalgebiet* der Operation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$. Da die j-Funktion nach Satz 1 auf jedem Orbit konstant ist, bietet es sich an, die Einschränkung von $j(\tau)$ auf $\mathbb{F}$ zu betrachten. Satz 2 besagt dann, dass die Funktion $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ injektiv ist. Zeigen Sie schließlich auch die Surjektivität der j-Funktion und somit:

Satz 3. *Die Funktion $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ ist bijektiv.*

References

[1] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 1–537.
[2] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.