# DAS ADDITIONS-GESETZ DER WEIERSTRASSSCHEN $\wp$–FUNKTION ([1], S. 60–63)

Beweisen Sie in Ihrem Vortrag das Additions-Gesetz der Weierstrassschen $\wp$–Funktion.

**Satz 1.** *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z \pm w \notin \Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ gilt:*

$$\wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right)^2. \tag{1}$$

Untersuchen Sie hierzu die Funktion

$$f(z, w) = \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)}\right).$$

Zeigen Sie zunächst:

**Proposition 2.** Für $w \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Lambda$ ist $f(z) = f(z, w)$ eine elliptische Funktion zum Gitter $\Lambda$ mit Polen erster Ordnung in den Punkten

$$z \in \Lambda \qquad \text{und} \qquad z \in -w + \Lambda.$$

Die Laurent-Entwicklungen zu den Entwicklungspunkten $z = 0$ und $z = -w$ sind

$$\begin{aligned} f(z, w) &= -\frac{1}{z} - \wp(w)z + O\left(z^2\right) &&\text{bei } z = 0, \\ f(z, w) &= \frac{1}{z+w} + c(w) + O(z+w) &&\text{bei } z = -w, \end{aligned}$$

worin $c(w) \in \mathbb{C}$ nicht von $z$ abhängt.

Satz 1 beruht darauf, dass für $w \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$F_w(z) = \wp(z+w) + \wp(z) + \wp(w) - f(z, w)^2$$

holomorph ist. Aus Satz 2 des zweiten Vortrages folgt dann, dass $F_w(z)$ konstant ist. Finden Sie schließlich ein $z \in \mathbb{C}$ mit $F_w(z) = 0$. Satz 1 folgt.

Zeigen Sie, dass (1) insbesondere impliziert:

**Korollar 3.**

(1) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\Lambda$ gilt:

$$\wp(2z) = -2\wp(z) + \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2.$$

(2) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z, w, z \pm w \notin \Lambda$ gilt:

$$\wp(z+w) - \wp(z-w) = -\frac{\wp'(z)\wp'(w)}{(\wp(z) - \wp(w))^2}.$$

Benutzen Sie schließlich die Differentialgleichung von $\wp$ aus dem fünften Vortrag, um aus Satz 1 zu folgern:

**Korollar 4.** Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z, z + \frac{\omega_1}{2} \notin \Lambda$ gilt:

$$\wp\left(z + \frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{e_1\wp(z) + e_1^2 + e_2e_3}{\wp(z) - e_1}.$$

## References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.