§1. Perioden und Gitter

1. Meromorphe Funktionen. Eine Funktion f heißt *meromorph* auf $\mathbb{C}$, wenn es eine abgeschlossene, diskrete Teilmenge D_f von $\mathbb{C}$ gibt, so dass

(i) $f : \mathbb{C} \setminus D_f \to \mathbb{C}$ holomorph ist und
(ii) in den Punkten von D_f Pole hat.

Dabei heißt eine abgeschlossene Teilmenge D von $\mathbb{C}$ *diskret*, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ eine Umgebung U von c gibt, für die $D \cap U$ endlich ist. Für U kann man jede beschränkte Umgebung von c nehmen. Äquivalent kann man sagen, dass die Menge

(1) $$\{z \in D\, ;\, |z| \leq \rho\} \text{ für jedes } \rho > 0 \text{ endlich ist.}$$

Weiter hat f in $c \in D_f$ genau dann einen *Pol*, wenn f in c nicht holomorph fortsetzbar ist, wenn es aber eine positive ganze Zahl m und eine Umgebung U von c gibt, so dass

(2) $$(z-c)^m \cdot f(z) \quad \text{auf } U \setminus \{c\} \text{ beschränkt ist.}$$

Bezieht man das Nullstellenverhalten an den Holomorphiestellen von f ein, so ist $f \neq 0$ genau dann auf $\mathbb{C}$ meromorph, wenn es zu jedem $c \in \mathbb{C}$ ein $n \in \mathbb{Z}$, eine Umgebung U von c und eine holomorphe Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ gibt mit der Eigenschaft

(3) $$f(z) = (z-c)^n \cdot g(z) \quad \text{für alle } z \in U \setminus \{c\} \text{ und } g(c) \neq 0.$$

Dann ist natürlich $n =: \mathrm{ord}_c f$ die *Ordnung von f in c*. Die Menge der auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen wird mit $\mathcal{M}$ bezeichnet. Dem Leser wird dringend empfohlen, Beispiele von meromorphen Funktionen zu sammeln, die über die rationalen Funktionen hinausgehen. Wegen (2) sind mit f und g natürlich auch αf, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f+g$ und $f \cdot g$ wieder meromorph und es gilt

$$D_{\alpha f} = D_f\ ,\ \alpha \neq 0\ ,\ D_{f+g} \subset D_f \cup D_g\ ,\ D_{fg} \subset D_f \cup D_g .$$

Nach dem Identitätssatz ist die Nullstellenmenge eines $0 \neq f \in \mathcal{M}$ abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$. Damit ist auch $1/f$ auf $\mathbb{C}$ meromorph und es gilt der

Satz. *Die auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktionen $\mathcal{M}$ bilden einen Körper.*

Bemerkungen. a) Die meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$ sind entgegen dem üblichen Sprachgebrauch nicht auf $\mathbb{C}$ definierte Abbildungen. Durch die übliche Erweiterung der Definition $f(c) := \infty$ für alle $c \in D_f$ erhält man jetzt aus jeder meromorphen Funktion f eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{P}(\mathbb{C}) := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Die Verknüpfungen in $\mathcal{M}$ sind dann mit den üblichen Rechenregeln für das Rechnen mit Unendlich,

$$c + \infty = \infty\ , \quad \frac{\alpha}{0} = \infty\ , \quad \frac{\alpha}{\infty} = 0\ , \quad \alpha \cdot \infty = \infty \quad \text{für } \alpha \neq 0 \quad \text{usw.}$$

verträglich. Die Bezeichnung $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ soll daran erinnern, dass $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ auf kanonische Weise mit dem *projektiven Raum* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ identifiziert werden kann. Als Warnung wird vermerkt, dass weder $0 \cdot \infty$ noch $\infty \pm \infty$ definiert sind: Diese Bildungen haben keinen Sinn.
b) Algebraisch ist $\mathcal{M}$ der Quotientenkörper des Ringes aller ganzen Funktionen: Zu jedem $f \in \mathcal{M}$ gibt es auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen p und q, $q \not\equiv 0$, mit

$$f(z) = p(z)/q(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus D_f.$$

Für einen Beweis vergleiche man R. Remmert [1995], Satz 3.1.5.

2. Perioden meromorpher Funktionen. Zunächst führen wir eine abkürzende, unmissverständliche Schreibweise ein: Für $\omega \in \mathbb{C}$ und $D \subset \mathbb{C}$ sei die Teilmenge $D + \omega$ von $\mathbb{C}$ erklärt durch

$$D + \omega := \{d + \omega \; ; \; d \in D\}. \tag{1}$$

Offenbar gilt dann

$$(D + \omega) + \omega' = D + (\omega + \omega') \quad \text{für} \quad \omega, \omega' \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Ein $\omega \in \mathbb{C}$ heißt *Periode* von f, wenn

(P.1) $D_f + \omega = D_f$ und
(P.2) $f(z + \omega) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D_f$

erfüllt ist. Trivialerweise ist 0 eine Periode von f für jedes $f \in \mathcal{M}$. Es bezeichne $\operatorname{Per} f$ die Menge der Perioden von f. Wegen (2) sieht man sofort, *dass* $\operatorname{Per} f$ *stets eine Untergruppe der additiven Gruppe* $\mathbb{C}$ *ist.* Fordert man (P.2) für alle $z \in \mathbb{C}$, für welche beide Seiten von (P.2) erklärt sind, dann ist (P.1) eine Konsequenz von (P.2). Natürlich gilt $\operatorname{Per} f = \mathbb{C}$ für jede konstante Funktion f.

Lemma. *Ist* $f \in \mathcal{M}$ *nicht konstant, dann ist* $\operatorname{Per} f$ *eine abgeschlossene, diskrete Untergruppe der additiven Gruppe* $(\mathbb{C}, +)$.

Beweis. Ist $\operatorname{Per} f$ nicht diskret oder nicht abgeschlossen, dann gibt es paarweise verschiedene $\omega_n \in \operatorname{Per} f$, $n \geq 1$, für die $\omega := \lim_{n\to\infty} \omega_n$ existiert. Aus (P.1) folgert man $D_f + \omega = D_f$, da D_f abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist. Ist f in c holomorph, dann ist f also auch in $c + \omega$ holomorph und es gilt $f(c) = f(c + \omega_n)$ für alle n. Nach dem Identitätssatz ist f aber konstant gleich $f(c) = f(c + \omega)$. □

Eine Beschreibung der möglichen Periodenmengen beinhaltet das

3. Fundamental-Lemma. *Ist* $f \in \mathcal{M}$ *nicht konstant, so tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:*

(I) $\operatorname{Per} f = \{0\}$.

(II) *Es gibt ein bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmtes* $\omega_f \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit der Eigenschaft* $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_f := \{m\omega_f\,;\ m \in \mathbb{Z}\}$.

(III) *Es gibt* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit folgenden Eigenschaften*

(i) $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 := \{m_1\omega_1 + m_2\omega_2\,;\ m_1, m_2 \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) ω_1, ω_2 *sind linear unabhängig über* $\mathbb{R}$.

(iii) $\tau := \omega_1/\omega_2$ *erfüllt* $\operatorname{Im} \tau > 0$, $|\operatorname{Re} \tau| \le \frac{1}{2}$ *und* $|\tau| \ge 1$.

$\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind offenbar genau dann linear unabhängig über $\mathbb{R}$, wenn ω_1/ω_2 nicht reell ist.

Beweis. Sei $\operatorname{Per} f \neq \{0\}$. Da $\operatorname{Per} f$ nach Lemma 2 abgeschlossen und diskret ist, gibt es nach 1(1) ein $\omega_f \in \operatorname{Per} f$ mit der Eigenschaft

$$(*) \qquad 0 < |\omega_f| = \inf\{|\omega|\,;\ 0 \neq \omega \in \operatorname{Per} f\}.$$

Wir untersuchen zunächst die Perioden auf der Geraden $\mathbb{R}\omega_f$.

Behauptung: $\operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f = \mathbb{Z}\omega_f$.

Beweis. Offenbar gilt $\mathbb{Z}\omega_f \subset \operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f$. Für ein beliebiges $\omega \in \operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\omega = \alpha\omega_f$. Man wählt $m \in \mathbb{Z}$ mit $|\alpha - m| < 1$ und erhält

$$|\omega - m\omega_f| = |\alpha - m| \cdot |\omega_f| < |\omega_f|.$$

Da mit ω und ω_f auch $\omega - m\omega_f$ zu $\operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f$ gehört, folgt $\omega = m\omega_f$ aus $(*)$. Also hat man auch $\operatorname{Per} f \cap \mathbb{R}\omega_f \subset \mathbb{Z}\omega_f$. □

Liegt $\operatorname{Per} f$ auf einer Geraden durch 0, also auf $\mathbb{R}\omega_f$, so folgt (II) aus der Behauptung. Zur Eindeutigkeit beachte man, dass $\mathbb{Z}\omega = \mathbb{Z}\omega'$ für $\omega, \omega' \in \mathbb{C}$ bereits $\omega' = \pm\omega$ impliziert.

Wir dürfen somit $\mathbb{Z}\omega_f \neq \operatorname{Per} f$ annehmen. Nach 1(1) existiert dann auch ein Element $\omega_1 \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ mit

$$(**) \qquad |\omega_1| = \inf\{|\omega|\,;\ \omega \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f\}.$$

Sei $\omega_2 := \omega_f$. Dann gilt $\tau := \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$ nach der Behauptung. Also sind ω_1, ω_2 linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Indem man ggf. ω_1 durch $-\omega_1$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $\operatorname{Im} \tau > 0$ annehmen. Aus $(*)$ folgt

$$|\omega_1| \ge |\omega_2|, \quad \text{also} \quad |\tau| \ge 1.$$

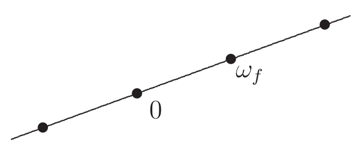

Abb. 2: Periodenmenge

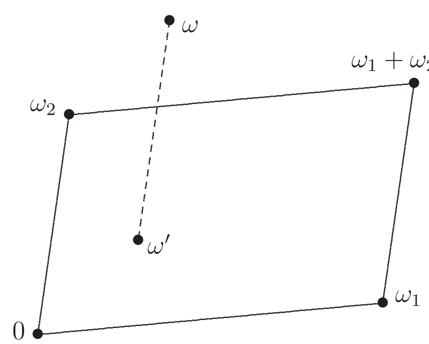

Abb. 3: Periodengitter

Wegen $(**)$ gilt

$$|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_1|, \quad \text{also} \quad |\tau \pm 1| \geq |\tau|$$

und damit $|\operatorname{Re}\tau| \leq 1/2$.

Offenbar gilt $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \operatorname{Per} f$. Sei nun $\omega \in \operatorname{Per} f$. Da ω_1, ω_2 eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$ ist, gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Nun wählt man $m_j \in \mathbb{Z}$ mit $\beta_j = \alpha_j - m_j, |\beta_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2$. Dann gilt

$$\omega' := \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 \in \operatorname{Per} f.$$

Ist $\beta_1 = 0$, so folgt $\omega' = 0$ bereits aus der Behauptung. Nimmt man $\beta_1 \neq 0$ an, so gilt natürlich $\omega' \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ und

$$\begin{aligned} |\omega'|^2 &= |\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2|^2 = (\beta_1^2 \cdot |\tau|^2 + 2\beta_1\beta_2 \cdot \operatorname{Re}\tau + \beta_2^2) \cdot |\omega_2|^2 \\ &\leq (\beta_1^2 + |\beta_1|\,|\beta_2| + \beta_2^2) \cdot |\tau|^2 \cdot |\omega_2|^2 \leq \tfrac{3}{4}|\omega_1|^2, \end{aligned}$$

wenn man (iii) berücksichtigt. Das ist ein Widerspruch zu $(**)$. Also folgt $\omega' = 0$ und auch $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, d. h. (III). □□

Es sei V ein reeller Vektorraum der endlichen Dimension $n \geq 1$, also z. B. $V = \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge Ω von V heißt ein *Gitter* in V, wenn es eine $\mathbb{R}$-Basis $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ von V gibt mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \ldots + \mathbb{Z}\omega_n$. Man nennt dann $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ auch eine *Basis* von Ω. Eine Darstellung eines $\omega \in \Omega$ in der Form

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \ldots + m_n\omega_n \quad \text{mit} \quad m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$$

nennt man auch eine *Linearkombination von ω durch $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ über $\mathbb{Z}$.* Offenbar ist mit Ω auch $\lambda\Omega := \{\lambda\omega\,;\,\omega \in \Omega\}$ ein Gitter in V, falls $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall (III) ist die Periodenmenge $\operatorname{Per} f$ also ein Gitter im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$. Im Hinblick auf Lemma 2 und das Fundamental-Lemma vermerken wir noch die

Proposition. *Jedes Gitter Ω in $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen und diskret in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Für $\rho > 0$ sei $M = \{\omega \in \Omega; |\omega| \leq \rho\}$. Indem man ggf. ρ durch $\rho/|\omega_2|$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, \tau = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0$, annehmen. Ist $\omega = m\tau + n \in M$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, so folgt einerseits sogleich

$$\rho^2 \geq |m\tau + n|^2 = (mx + n)^2 + m^2y^2 \geq m^2y^2,$$

also $|m| \leq \rho/y$. Andererseits gilt

$$\rho \geq |mx + n| \geq |n| - |mx|, \quad \text{also} \quad |n| \leq \rho\,(1 + |x|/y)\,.$$

Daher ist M endlich. □

Bemerkungen. a) Einen anderen Beweis des Fundamental-Lemmas findet man in dem Buch von HURWITZ–COURANT [1964], II, 1, § 2, aus dem Jahre 1922.
b) Hinter den Fällen (II) und (III) steht der folgende allgemeine

Satz*. *Für eine Untergruppe $G \neq \{0\}$ der additiven Gruppen $(\mathbb{R}^n, +)$ sind quivalent:*

(i) *G ist diskret.*

(ii) *Es gibt linear unabhängige Vektoren $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq r \leq n$, mit $G = \mathbb{Z}c_1 + \ldots + \mathbb{Z}c_r$.*

Einen *Beweis* findet man z. B. bei M. KOECHER [1985], Theorem I.5.5.
c) Mit dem Fundamental-Lemma ist eine notwendige Bedingung an die Periodenmenge $\operatorname{Per} f$ einer nicht-konstanten meromorphen Funktion f hergeleitet. Dabei ist $\operatorname{Per} f = \{0\}$ sicherlich als der „allgemeine Fall" anzusehen, jedoch ist er im vorliegenden Zusammenhang ohne Interesse. Ist $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$, so gibt es sogar eine ganze Funktion f mit $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega$. Man wählt einfach $f(z) = \exp(2\pi i z/\omega)$. Nach R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.3.2, gibt es zu jeder ganzen Funktion f mit $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega$ genau eine auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion F mit der Eigenschaft

$$f(z) = F(\exp(2\pi i z/\omega)) \quad \text{für alle } \ z \in \mathbb{C}.$$

Bevor in § 3 gezeigt wird, dass es zu jedem Gitter Ω in $\mathbb{C}$ auch meromorphe Funktionen f mit $\Omega = \operatorname{Per} f$ gibt, ist eine Diskussion der fundamentalen Eigenschaften von Gittern in $\mathbb{C}$ sinnvoll. Nach der Beschreibung eines anderen Zugangs in **4** geschieht dies in den Abschnitten **5** bis **7**.

4*. JACOBIs Zugang. Im Jahre 1835 beschäftigte sich C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke II*, 23–50) mit der Frage, wie viele „unabhängige" Perioden eine nicht-konstante meromorphe Funktion haben kann, und zeigte, dass diese Zahl höchstens zwei ist. Seine Ergebnisse formulieren wir in moderner Sprache als

Lemma von JACOBI. *Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ und sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ gegeben, dann gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, so dass*

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = 0.$$

Damit sind also je drei Elemente von Ω über $\mathbb{Q}$ linear abhängig. Für einen Beweis benutzt man die so genannte

KRONECKER-Approximation. *Zu jeder positiven ganzen Zahl N und allen $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$ gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, mit den Eigenschaften:*

(i) $$|m_1|, |m_2|, |m_3| \leq N,$$

(ii) $$|m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3| < \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}.$$

Beweis. Man setzt $M := \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}$ und

$$\langle m, w\rangle := m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 \quad \text{für} \quad m = (m_1, m_2, m_3)\,,\; w = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Schließlich wird das achsenparallele Quadrat in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2K$ mit $Q(K)$ bezeichnet, also

$$Q(K) := \{z \in \mathbb{C}\,;\; |\mathrm{Re}\, z| \le K\,,\; |\mathrm{Im}\, z| \le K\}.$$

Für alle $m = (m_1, m_2, m_3)^t \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$(*) \qquad 0 \le m_1, m_2, m_3 \le N$$

gilt dann $\langle m, w\rangle \in Q(T)$ mit $T := 3MN$. Die Kanten von $Q(T)$ werden nun in t gleiche Teile geteilt. Damit erhält man eine Zerlegung von $Q(T)$ in t^2 Quadrate der Kantenlänge $2T/t$. Die Anzahl der $m \in \mathbb{Z}^3$ mit $(*)$ ist $(N+1)^3$. Nach dem DIRICHLETschen Schubfachschluss liegen im Fall $(N+1)^3 > t^2$ wenigstens zwei Punkte $\langle m', w\rangle$ und $\langle m'', w\rangle$ in einem Quadrat der Kantenlänge $2T/t$. Damit erhält man durch Differenzbildung ein $0 \ne m \in \mathbb{Z}^3$ mit (i) und

$$(**) \qquad \langle m, w\rangle \in Q\,(2T/t), \quad \text{also} \quad |\langle m, w\rangle\,| \le \sqrt{2} \cdot 2T/t.$$

Man wählt nun ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $(N+1)^{3/2} > t \ge (N+1)^{3/2} - 1$. Dann gilt also $(N+1)^3 > t^2$ und $t \ge N^{3/2}$. Aus $(**)$ folgt somit (ii). □

Zum *Beweis* des Lemmas von JACOBI gibt es nach 1(1) ein $\rho > 0$ mit $|\omega| \ge \rho$ für alle $0 \ne \omega \in \Omega$. Für hinreichend großes N ist daher die linke Seite von (ii) gleich Null. □□

Aus dem Lemma von JACOBI kann man nun einen neuen Beweis des Fundamental-Lemmas ableiten. Dieser Beweis ist methodisch nicht uninteressant:

Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{C}$ und sind $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, dann ergibt das Lemma von JACOBI sofort

$$(1) \qquad \Omega \subset \mathbb{Q}\omega_1 + \mathbb{Q}\omega_2.$$

Proposition. *Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$\Omega \subset \frac{1}{N}(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2).$$

Beweis. Andernfalls würde es $\omega \in \Omega$ nach (1) mit beliebig großen Nennern geben, d. h., man hätte

$$0 \ne \omega_k' = \frac{1}{N_k}(r_k\omega_1 + s_k\omega_2) \in \Omega\,,\; k \in \mathbb{N},$$

mit ganzen Zahlen $r_k, s_k, N_k, \mathrm{ggT}(r_k, s_k, N_k) = 1$ und $N_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Da man nach Addition geeigneter Punkte aus $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ohne Einschränkung $0 \le r_k\,,\; s_k \le N_k$, also auch $|\omega_k'| \le |\omega_1| + |\omega_2|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen darf, würde es eine aus paarweise verschiedenen Gliedern bestehende konvergente Teilfolge von $(\omega_k')_{k\in\mathbb{N}}$ geben. Da Ω diskret ist, erhalten wir einen Widerspruch. □

Bekanntlich (vgl. K. Meyberg [1980], Satz 5.5.1) ist jede Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe selbst wieder frei. Nach der Proposition ist Ω eine Untergruppe einer *freien* Gruppe, also auch frei. Wegen $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \Omega$ ist Ω notwendig ein Gitter.

5. Die Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$**.** Die Menge

$$\mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) := \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$$

bildet bekanntlich bei Matrizen-Addition und -Multiplikation einen Ring mit Einselement $E := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Die Gruppe der Einheiten des Ringes $\mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ heißt *allgemeine lineare Gruppe vom Grad 2 über* $\mathbb{Z}$ und wird mit $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ bezeichnet:

(1) $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\,;\ \text{es gibt } V \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) \text{ mit } UV = VU = E\}.$

Äquivalenz-Satz. *Für* $U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ *sind äquivalent:*
(i) $U \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$.
(ii) $\det U = \pm 1$.
(iii) *U ist invertierbar über $\mathbb{Q}$ und $U^{-1} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$.*
(iv) *Die Abbildung $U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, ist bijektiv.*
(v) *Die Abbildung $U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, ist surjektiv.*

Beweis. Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) sind offensichtlich.
(v) $\Longrightarrow$ (ii): Es gibt also $u, v \in \mathbb{Z}^2$ mit $Uu = \binom{1}{0}$ und $Uv = \binom{0}{1}$, d. h. $UV = E$ für $V := (u, v)$. Durch Determinantenbildung folgt $\det U \cdot \det V = 1$, also (ii).
(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Man verwendet die bekannte Darstellung

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{für } \ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Neben der Gruppe $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ betrachtet man noch den Normalteiler

(2) $$\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}) \ ; \ \det U = 1\}$$

von $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$, die so genannte *spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über* $\mathbb{Z}$. Wegen

$$\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \cup \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ den Index 2 in $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$. Die Gruppen $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ bzw. $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ sind „größer" als man zunächst denkt: Für $U = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ folgt zunächst $\pm 1 = \det U = ad - bc$, so dass z. B. *c und d teilerfremd sind*. Umgekehrt gilt das

Ergänzungs-Lemma. *Sind $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann gibt es eine Matrix*

$$U = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}).$$

Hier ist U bis auf einen linksseitigen Faktor der Form $\left(\begin{smallmatrix}1&k\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Da c, d teilerfremd sind, gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad-bc = 1$, d. h., $U = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ gehört zu $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$. Ist $V \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ eine weitere Matrix mit $V = \left(\begin{smallmatrix}*&*\\c&d\end{smallmatrix}\right)$, dann folgt

$$VU^{-1} = \begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}* & *\\ 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}),$$

also notwendig $VU^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1&k\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkungen. a) Das Beispiel $U = 2E$ zeigt, dass man – im Gegensatz zu der analogen Situation über einem Körper – die Bedingung „$U : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ ist injektiv" nicht in den Äquivalenz-Satz aufnehmen kann.
b) Das Ergänzungs-Lemma erlaubt die Konstruktion von zahllosen Beispielen: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 10\\ 2 & 7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}89 & 144\\ 144 & 233\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}514\,229 & 832\,040\\ 832\,040 & 1\,346\,269\end{pmatrix}$$

gehören z. B. zu $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$.
c) Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich cum grano salis leicht auf $n \times n$ Matrizen übertragen. Man vergleiche V.1.1 oder M. Koecher [1985], Chap. I, oder M. Newman [1972], Chap. II.

6. Basis-Lemma. *Sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Für $\omega_1', \omega_2' \in \mathbb{C}$ gilt dann:*
a) *Genau dann gehören ω_1' und ω_2' zu Ω, wenn es ein $U \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ gibt mit*

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) *Genau dann ist (ω_1', ω_2') eine Basis von Ω, wenn die Matrix U in (1) zu $\mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$ gehört.*

Beweis. a) Sind ω_1', ω_2' beliebige Punkte von Ω, dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2\,, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2,$$

also

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}). \tag{$*$}$$

Gilt umgekehrt $(*)$, so gehören ω_1' und ω_2' zu Ω.
b) Ist (ω_1', ω_2') eine Basis von Ω, dann gibt es auch eine Matrix $V \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $\left(\begin{smallmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{smallmatrix}\right) = V\left(\begin{smallmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{smallmatrix}\right)$. Es folgt

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} = VU\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = UV\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}.$$

Da aber (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, hat man $VU = UV = E$, also $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$ nach 5(1).
Ist $U \in \mathrm{GL}\,(2;\mathbb{Z})$, dann sind (ω_1', ω_2') in $(*)$ zunächst linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Für beliebige $\omega_1'', \omega_2'' \in \Omega$ gibt es analog ein $W \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix}\omega_1''\\ \omega_2''\end{pmatrix} = W\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix}\omega_1''\\ \omega_2''\end{pmatrix} = WU^{-1}\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix}.$$

Damit sind ω_1'', ω_2'' jeweils Linearkombinationen von ω_1', ω_2' über $\mathbb{Z}$. Also ist ω_1', ω_2' eine Basis von Ω. □

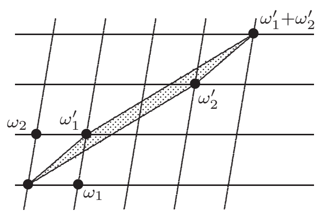

Abb. 4: Grundmaschen

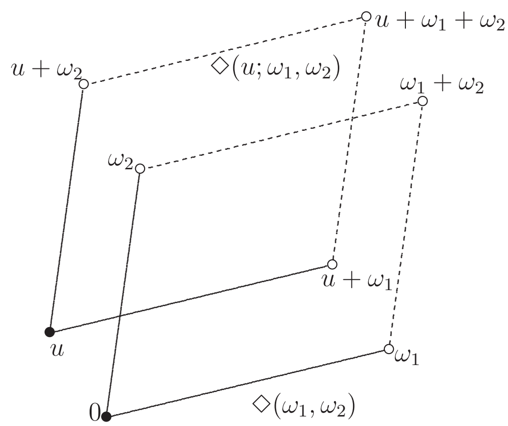

Abb. 5: Periodenparallelogramme

Es sei Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$ und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω. Für $u \in \mathbb{C}$ definiert man das *Periodenparallelogramm* (bezüglich ω_1, ω_2 mit *Basispunkt* u) durch

(2) $$\Diamond(u;\omega_1,\omega_2) := \{u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2\ ;\ 0 \le \alpha_1 < 1\,,\ 0 \le \alpha_2 < 1\}.$$

Im Fall $u = 0$ schreibt man auch

(3) $$\Diamond(\omega_1,\omega_2) := \Diamond(0;\omega_1,\omega_2) = \{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2\ ;\ 0 \le \alpha_1 < 1\,,\ 0 \le \alpha_2 < 1\}$$

und nennt $\Diamond(\omega_1,\omega_2)$ auch eine *Grundmasche* des Gitters. Jedes Periodenparallelogramm $P := \Diamond(u;\omega_1,\omega_2)$ ist ein *Fundamentalbereich* von $\mathbb{C}$ bezüglich Ω im folgenden Sinne:

Proposition A. *Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $\omega \in \Omega$ mit $z + \omega \in P$. Gehören insbesondere z und $z + \omega$, $\omega \in \Omega$, zu P, dann gilt $\omega = 0$.*

Beweis. Man wähle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $z - u = \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2$ und reduziere ξ_1 und ξ_2 modulo 1. □

Natürlich gibt es zu jedem Gitter viele Periodenparallelogramme, es gilt aber die

Proposition B. *Die elementar-geometrische Fläche eines beliebigen Periodenparallelogramms $P = \Diamond(u;\omega_1,\omega_2)$ ist gleich*

$$\operatorname{vol}\Omega := |\operatorname{Im}(\omega_1\overline{\omega_2})|.$$

Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis (ω_1,ω_2) von Ω und des Basispunktes u.

Beweis. Die elementar-geometrische Fläche des Parallelogramms P ist in euklidischen Koordinaten zunächst gegeben durch (vgl. M. KOECHER [1997], IV.1.6)

$$F := \left|\det\begin{pmatrix}\operatorname{Re}\omega_1 & \operatorname{Re}\omega_2\\ \operatorname{Im}\omega_1 & \operatorname{Im}\omega_2\end{pmatrix}\right|.$$

Eine Verifikation ergibt $F = |\operatorname{Im}(\omega_1\overline{\omega_2})|$. Ist nun $\omega_1' = a\omega_1+b\omega_2$, $\omega_2' = c\omega_1+d\omega_2$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc = \pm 1$, eine weitere Basis von Ω nach dem Basis-Lemma, so folgt

$$F' = |\operatorname{Im}(\omega_1'\overline{\omega_2'})| = |\operatorname{Im}(ad\omega_1\overline{\omega_2} + bc\omega_2\overline{\omega_1})| = |ad-bc|\cdot|\operatorname{Im}(\omega_1\overline{\omega_2})|,$$

also $F' = F$. □

7. Die Faktorgruppe $\mathbb{C}/\Omega$. Es sei Ω eine Untergruppe von $(\mathbb{C},+)$. Man erklärt eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}$ durch

$$(1)\qquad a \equiv b \pmod{\Omega} \iff a-b\in\Omega.$$

Die Äquivalenzklassen können dann in der Form $a+\Omega$, $a\in\mathbb{C}$, geschrieben werden. Als abelsche Untergruppe von $(\mathbb{C},+)$ ist Ω ein Normalteiler von $\mathbb{C}$. Die Faktorgruppe wird mit

$$(2)\qquad \mathbb{C}/\Omega := \{a+\Omega\ ;\ a\in\mathbb{C}\}$$

abgekürzt und die kanonische Projektion mit π bezeichnet:

$$(3)\qquad \pi:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}/\Omega\ ,\ \pi(a) := a+\Omega.$$

Ist Ω ein Gitter in $\mathbb{C}$, dann ist nach Proposition 6A für jedes beliebige Periodenparallelogramm $P = \Diamond(u;\omega_1,\omega_2)$ die Einschränkung

$$(4)\qquad \pi|_P : P\longrightarrow\mathbb{C}/\Omega \quad \text{bijektiv.}$$

Bekanntlich ist die Addition in $\mathbb{C}/\Omega$ durch

$$(5)\qquad (a+\Omega)+(b+\Omega) := (a+b)+\Omega$$

gegeben. Damit ist $\mathbb{C}/\Omega$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement Ω. Induziert man die Topologie von $\mathbb{C}$ mit der kanonischen Projektion (3) nach $\mathbb{C}/\Omega$, betrachtet man also $\mathbb{C}/\Omega$ mit der Quotiententopologie, so wird $\mathbb{C}/\Omega$ zu einem kompakten topologischen Raum. Dabei heißt definitionsgemäß eine Teilmenge A von $\mathbb{C}/\Omega$ offen, wenn $\pi^{-1}(A)$ offen in $\mathbb{C}$ ist. Wegen (4) kann man sich $\mathbb{C}/\Omega$ als *Torus*